ВСЕРОССИЙСКАЯ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ
СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «СПЕКТРиК» (МАТЕМАТИКА)
ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ П. П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

1. Ахиллес догоняет черепаху, которая находится на расстоянии 1 км от него. За первую минуту Ахиллес уменьшил расстояние до черепахи в два раза. Древнегреческий герой достаточно быстро уставал, поэтому за каждую следующую минуту Ахиллес приближался к черепахе на расстояние, составляющее $\frac{3}{5}$ от расстояния, на которое он приблизился за предшествующую минуту. На какой минуте, от времени начала движения, Ахиллес догонит черепаху?

Решение. 1. 1000 : 2 = 500 м/мин – скорость сближения Ахиллеса и черепахи на первой минуте.

2. В дальнейшем скорость сближения каждую минуту будет составлять $\frac{3}{5}$ от скорости сближения на предшествующей минуте:

1000 – (500 + 300 + 180) = 20 м – расстояние через 3 мин.

108 м/мин – скорость сближения на четвёртой минуте.

Ответ: на 4 минуте.

2. Пусть S – площадь фигуры, состоящей из всех точек принадлежащих геометрическому месту точек плоскости, удалённых на расстояние не более 2 от окружности радиуса 3. Чему равно значение $\frac{S}{\pi}$.

Решение. Искомое ГМТ – это кольцо между окружностями радиусов 5 и 1. Следовательно, $S = \pi(5^2 - 1^2) = 24\pi$. Тогда, $\frac{S}{\pi} = 24$.

Ответ: 24.

3. Примитивный искусственный интеллект (ИИ) анализирует рынок недвижимости города Липецк. ИИ определяет прогноз стоимости квартиры с помощью линейной функциональной зависимости $y = ax + b$. Где x площадь квартиры в квадратных метрах, а y её стоимостью в млн. руб. В формуле $y = ax + b$ указанной зависимости значение свободного члена b = 1,2 млн. руб. было определено экспертами. Значение коэффициента a вычислялось на основе анализа нескольких предложений на рынке недвижимости. Для приведённых в таблице четырёх квартир были определены в соответствии с указанной формулой значения коэффициентов a_i (i = 1; 2; 3; 4). Среднее арифметическое значение четырёх найденных вариантов коэффициента a стало использоваться в функциональной зависимости. С помощью полученной функции определите прогноз стоимости квартиры в 42 м^2. Ответ дайте в млн. руб.

x (м^2)	50	30	60	55
y (млн. руб.)	4,7	4,2	10,2	5,6

Решение. Решение задачи отобразим в виде таблицы, в которой в начале посчитаем значение коэффициентов a для исходных табличных значений, затем определим среднее арифметическое найденных вариантов a и, наконец, используя полученных коэффициент найдём искомую стоимость квартиры.

x (м^2)	50	30	60	55	42
y (млн. руб.)	4,7	4,2	10,2	5,6	5,4
a	0,07	0,1	0,15	0,08	0,1

Ответ: 5,4 млн. руб.

4. Нерадивый участник дистанционной экспресс олимпиады захотел получить решение с помощью некоторой системы искусственного интеллекта ИИ. Известно, что на олимпиаде было 6 задач, на первую задачу участник потратил 30 секунд, время выполнения каждой следующей задачи равновероятно было в 1,5 или 2 раза больше, чем время выполнения предшествующей задачи. Продолжительность олимпиады полчаса. Какова вероятность того, что участник успел отправить решение всех задач, если 5 минут ему ещё требуется на ввод результатов?

Решение. 1. Если каждый раз время выполнения задачи увеличивалось в два раза, то общее время выполнения олимпиады будет равно 5 + 0,5 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 36,5 мин и его не хватит на отправку всех задач.

2. Если каждый раз время выполнения задачи, за исключением одного случая, увеличивалось в два раза, то общее время выполнения олимпиады в двух случаях будет больше 30 мин, а в остальных не превосходит 30 мин.

Случаи, не удовлетворяющие условию:

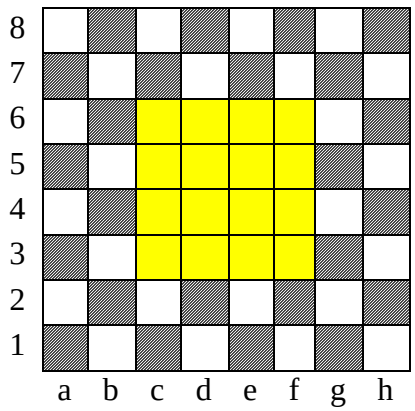
5 + 0,5 + 1 + 2 + 4 + 8 + 12 = 32,5 мин и 5 + 0,5 + 1 + 2 + 4 + 6 + 12 = 30,5 мин.

3. Общее количество вариантов: $2^5 = 32$. Тогда искомая вероятность $p = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32} \approx 0{,}906$.

Ответ: 0,906.

5. В шахматной доске 8 х 8 вырезали центральный квадрат размером 4 х 4 клетки.

а) Какое наибольшее число ладей, не бьющих друг друга, можно поставить на получившуюся часть доски? Приведите пример расстановки и докажите, что большее число ладей расставить нельзя.



б) Сколько всего таких расстановок?

(Ладьи бьют друг друга, если они находятся на одной клетчатой линии – вертикали, горизонтали – и в этой линии нет вырезанных клеток.)

Решение. а) В каждый прямоугольник (указываем одну их большую диагональ) a7-h8, a1-b8, a1-h2, g1-h8 можно поставить не более двух ладей. Так они содержат только две горизонтали или вертикали на

разделённые вырезанными клетками. Указанные прямоугольники целиком закрывают данную по условию часть доски, поэтому ладей не больше $2 \cdot 4 = 8$.

Пример расстановки ладей: c7, d8, a3, b4, c1, d2, g3, h4.

б) Если одна из ладей будет стоять в квадратах a7-b8, a1-b2, g7-h8, g1-h2, то она будет “закрывать” сразу целые горизонталь и вертикаль, упоминавшиеся в пункте “а”. Следовательно, в этом случае 8 ладей расставить не получится.

Подсчитаем количество расстановок ладей в прямоугольнике c7-f8. Одна ладья обязательно стоит в верхней горизонтали, её расположение можно выбрать одним из четырёх способов. Одна ладья находится во второй горизонтали, её расположение можно выбрать одним из трёх способов. Таким образом, общее количество вариантов в рассматриваемом случае $4 \cdot 3 = 12$.

Аналогично, для прямоугольников a3-b6, c1-f2, g3-h6. Следовательно, общее количество расстановок $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 20\,736$.

Ответ: а) 8, б) $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 20\,736$.