Олимпиада «Спектр» по физике
2 тур, 2024 г.

№1

Моторная лодка массой m движется со скоростью V_0. В момент времени t = 0 двигатель лодки выключили. Найти уравнение движения и функцию скорости катера, а также время, когда скорость; катера уменьшится вдвое по отношению к начальной скорости. Известно, что сила сопротивления пропорциональная скорости лодки (коэффициент пропорциональности считать известным).

Примерное решение:

Второй закон Ньютона $F = ma$

$$-rV = m\frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{r}{m}\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{r}{m}t$$

Скорость уменьшается в 2 раза

$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{r}{m}t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{m}{r}\ln 2$$

$$v = v_0\exp(-\frac{r}{m}t)$$

По определению скорости: $v = \frac{dx}{dt}$

$$x = \int_0^t v\,dt = v_0\int_0^t \exp(-\frac{r}{m}t)dt = -\frac{mv_0}{r}\exp(-\frac{r}{m}t)\Big|_0^t = \frac{mv_0}{r}(1-\exp(-\frac{r}{m}t))$$

Ответ:

$$t_0 = \frac{m}{r}\ln 2 \qquad v = v_0\exp(-\frac{r}{m}t) \qquad x = \frac{mv_0}{r}(1-\exp(-\frac{r}{m}t))$$

№2

В объеме 1 см^3 находится водород. Температуру и давление для считать нормальными. Определить число молекул водорода в этом объеме, со скоростями, менее 1 м/с.

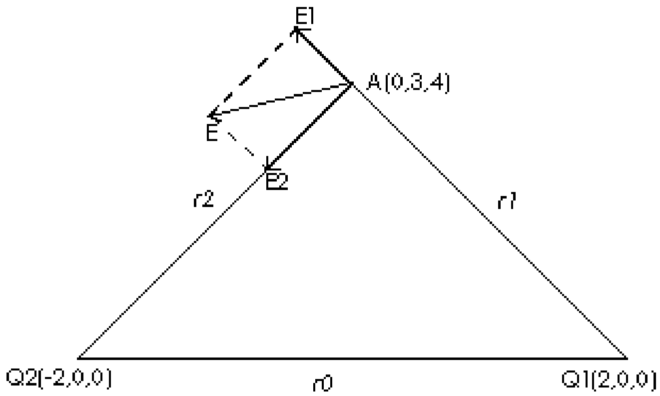
Примерное решение

1. Общее число молекул
   $N_0 = VN_A$
2. Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона
   $PV = VKT$
   $V = \frac{PV}{KT}$
3. Подставим значение (2) в (1)
   $N_0 = \frac{PV}{KT}$
4. Число молекул dN, относительные скорости которых заключены в пределах от U до U+dU
   $dN = \frac{4N_0}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 dU,$
   где $U = \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{вер}}}$
5. Так как U<1, то $e^{-u^2} \approx 1 - u^2 \approx 1$
   $dN = \frac{4N_0}{\sqrt{\pi}} U^2 dU$
6. Проинтегрируем (5)
   $N = \frac{4N_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^U U^2 dU = \frac{4N_0}{\sqrt{\pi}} * \frac{U^3}{3} = \frac{4N_0}{\sqrt{\pi}} * \frac{\upsilon^3}{3\upsilon_{\text{вер}}^3}$
7. Наиболее вероятная скорость
   $\upsilon_{\text{вр}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$
8. Подставим (3) и (7) в (6)
   $N = \frac{4PV}{3KT\sqrt{\pi}} * \frac{\upsilon^3}{(\frac{2RT}{M})^{\frac{3}{2}}}$
   $N = \frac{4*10^5*10^{-6}}{3*1.38*10^{-23}*293\sqrt{3.14}} * \frac{1^3}{(\frac{2*8.31*293}{2*10^{-3}})^{\frac{3}{2}}} = 4.9 * 10^9$
   Ответ: $N = 4.9 * 10^9$.

№3

В точках с геометрическими координатами (2,0,0) и (-2,0,0) (координаты в сантиметрах) расположены точечные заряды q_1= 3,3·10^{-9}Кл и q_2 = -13,3·10^{-9}Кл. Определите величину и направление напряженности электрического поля в точке с координатами (0,3,4). Определите координаты точек, в которых поле Е равно нулю.

Примерное решение



Напряженность Е в точке А электрического поля равна

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z$$

Найдем расстояние от зарядов к точке А:

$$r_1 = \sqrt{(0-2\cdot10^{-2})^2 + (3\cdot10^{-2}-0)^2 + (4\cdot10^{-2}-0)^2} = \sqrt{29}\cdot10^{-2}$$

$$r_2 = \sqrt{(0+2\cdot10^{-2})^2 + (3\cdot10^{-2}-0)^2 + (4\cdot10^{-2}-0)^2} = \sqrt{29}\cdot10^{-2}$$

Следовательно $r_1 = r_2 = r$

Найдем Ex, Ey, Ez в точке А:

$$E_x = k\frac{q_1}{r_1^3}x_1 + k\frac{q_2}{r_2^3}x_2 = \frac{k}{r^3}(q_1x_1 + q_2x_2)$$

$$E_x = \frac{9\cdot10^9}{\sqrt{29}^3\cdot10^{-6}}(3{,}3\cdot10^{-9}\cdot(-0{,}02) + (-13{,}3\cdot10^{-9})\cdot0{,}02) = -19134\hat{A}/\grave{\imath}$$

$$E_y = k\frac{q_1}{r_1^3}y_1 + k\frac{q_2}{r_2^3}y_2 = \frac{k}{r^3}(q_1y_1 + q_2y_2)$$

$$E_y = \frac{9\cdot10^9}{\sqrt{29}^3\cdot10^{-6}}(3{,}3\cdot10^{-9}\cdot(0{,}03) + (-13{,}3\cdot10^{-9})\cdot0{,}03) = -17290\hat{A}/\grave{\imath}$$

$$E_z = k\frac{q_1}{r_1^3}z_1 + k\frac{q_2}{r_2^3}z_2 == \frac{k}{r^3}(q_1z_1 + q_2z_2)$$

$$E_z = \frac{9 \cdot 10^9}{\sqrt{29}^3 \cdot 10^{-6}}(3{,}3 \cdot 10^{-9} \cdot (0{,}04) + (-13{,}3 \cdot 10^{-9}) \cdot 0{,}04) = -23054\, \hat{A}/\grave{\imath}$$

$$\vec{E} = -19134\vec{i} - 17290\vec{j} - 23054\vec{k}$$

$$E = \sqrt{E_x{}^2 + E_y{}^2 + E_z{}^2} = \sqrt{19134^2 + 17290^2 + 23054^2} = 34591\, \hat{A}/\grave{\imath}$$

Поле в точке отсутствует если $E_x = E_y = E_z = 0$

Т.к. заряды расположены на оси Ох, то и точки где поле равно нулю лежат на Ох.

Следовательно

$k\dfrac{q_1}{r_1{}^3}(x_0 - 2) + k\dfrac{q_2}{r_2{}^3}(x_0 + 2) = 0$, где $r_1 = \sqrt{(x_0 - 2)^2 + 0^2 + 0^2} = |x_0 - 2|$ и $r_2 = |x_0 + 2|$

Сделаем сокращения и получим

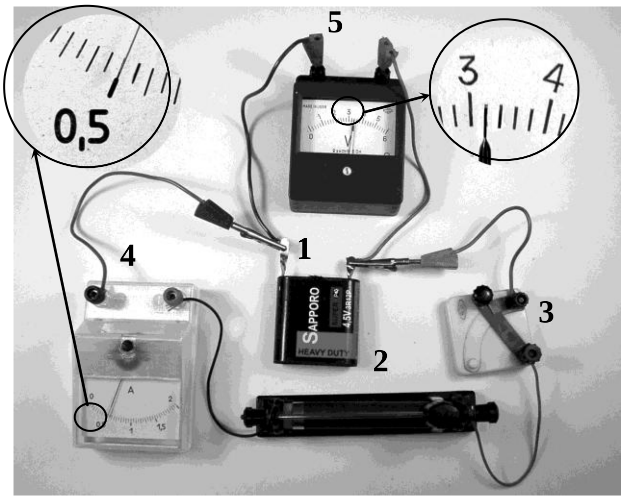
$$\frac{3{,}3 \cdot 10^{-9}}{|x_0 - 2|^3}(x_0 - 2) + \frac{-13{,}3 \cdot 10^{-9}}{|x_0 + 2|^3}(x_0 + 2) = 0$$

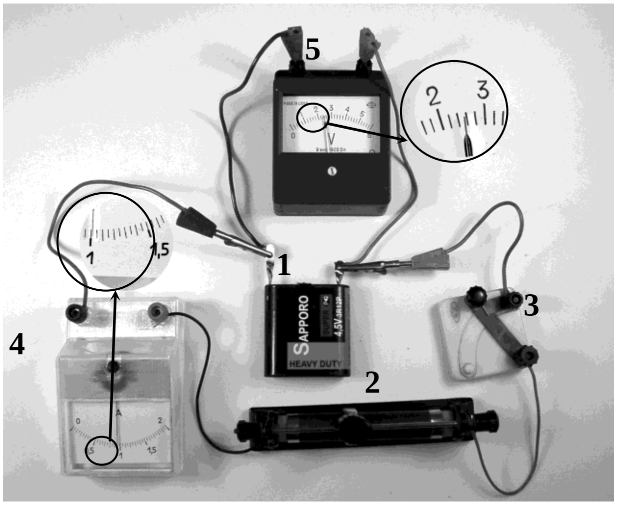
откуда $x_0 \approx 5{,}97$

Ответ: а) E= $34591\, В/м$, $\vec{E} = -19134\vec{i} - 17290\vec{j} - 23054\vec{k}$ б) (5.97,0,0)

№4

Студент получил задание собрать электрическую цепь и экспериментально определить сопротивление реостата, при котором выделяемая на нём мощность электрического тока максимальна. Цепь состояла из источника постоянного тока (1), ползункового реостата (2), механического ключа (3), стрелочного амперметра (4) и вольтметра (5). Студент измерил напряжение на выходах источника тока и силу тока в собранной цепи при различных положениях ползунка реостата (указано на фотографии). Какое значение сопротивления реостата получил студент.





Примерное решение

1. Мощность электрического тока, выделяемая на реостате, равна $P = I^2 R$, где I – сила тока в реостате, R – сопротивление реостата.

2. Вольтметр, подключённый к клеммам батарейки, показывает напряжение на внешнем участке цепи. Поскольку сопротивление амперметра и ключа должны быть пренебрежимо малы, то падение напряжения на этих элементах практически отсутствует. Таким образом, вольтметр показывает напряжение на реостате.

3. Закон Ома для полной цепи имеет вид: $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r}$, где r – внутреннее сопротивление батарейки, а ε – ЭДС батарейки.

В этом случае для мощности можно записать: $P = \left(\dfrac{\varepsilon}{R + r}\right)^2 \cdot R$. Для определения значения R, при котором P максимальна, возьмём производную и приравняем ее нулю. Получим, что в этом случае $R = r$. Следовательно, мощность электрического тока P, выделяемая на реостате, максимальна в том случае, если сопротивление реостата R равно внутреннему сопротивлению батарейки r: $R_x = r$

4. Закон Ома для полной цепи имеет вид: $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r}$

Закон Ома для участка цепи с реостатом имеет вид: $I = \dfrac{U}{R}$

Из этих двух формул получаем: $\varepsilon = U + Ir$

Для двух положений реостата имеем систему из уравнений: $\begin{cases} \varepsilon = U_1 + I_1 r \\ \varepsilon = U_2 + I_2 r \end{cases}$

Отсюда $U_1 + I_1 r = U_2 + I_2 r$ и $r = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1}$. Следовательно $R_x = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1}$.

Значения напряжения и силы тока в двух экспериментах, согласно фотографиям:

U_1 = 3,2 В I_1 = 0,5 А.

U_2 = 2,6 В I_2 = 1 А.

Тогда $R_x = \frac{3,2 - 2,6}{1,0 - 0,5} = \frac{0,6}{0,5} = 1,2(\text{Ом})$

Примечание: отклонения в записанных показаниях приборов в пределах цены деления этих приборов не считаются ошибкой; соответственно могут различаться и числовые значения ответа.

№5

Неподвижное ядро калия бомбардируют α-частицей. При достижении определенного (минимального) приближения α-частицы к ядру сила отталкивания между ними составляет $F = 100H$. Определите на какое наименьшее расстояние α-частица приблизилась к ядру K? Определите начальную скорость альфа-частицы вдали от ядра. Электронную оболочку калия в задаче не учитывать. Провести анализ размерностей полученных расчетных формул.

Примерное решение

Дано:

$F = 100H$

${}^{39}_{19}K$

$\alpha = {}^{4}_{2}He^{2+}$

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

1 а.е.м.$= 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг

Найти:

$r_{\min} - ?$

$v - ?$

Решение.

Ядро атома калия ${}^{39}_{19}K$ имеет заряд $+19|e|$, а α-частица ($\alpha = {}^{4}_{2}He^{2+}$) - $+2|e|$. Сила взаимодействия между ними составит:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{19 \cdot 2e^2}{r_{\min}^2}$$

Определяем расстояние:

$$r_{\min} = e\sqrt{\frac{19}{2\pi\varepsilon_0 F}}$$

Потенциальная энергия взаимодействия ядра калия с α-частицей на таком расстоянии равна:

$$W = \frac{19}{2\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_{\min}}$$

Из закона сохранения энергии определяем скорость α-частицы вдали от ядра:

$m -$ масса α-частицы; $m = 4$ а.е.м.

$$W = K$$

$$W = \frac{19}{2\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_{\min}} = \frac{mv^2}{2} = K$$

$$v = e\sqrt{\frac{19}{\pi\varepsilon_0 m r_{\min}}}$$

Анализ размерности:

$$\left[r_{\min}\right] = Кл\sqrt{\frac{1}{\frac{Ф}{м}H}} = Кл\sqrt{\frac{1}{\frac{Кл}{м \cdot В}H}} = Кл\sqrt{\frac{1}{\frac{Кл}{м \cdot \frac{Дж}{Кл}}Дж \cdot м}} = Кл\sqrt{\frac{м^2}{Кл^2}} = м$$

$$[v] = Кл\sqrt{\frac{1}{\frac{Ф}{м}кг\cdot м}} = Кл\sqrt{\frac{1}{\frac{Кл}{м\cdot В}кг\cdot м}} = Кл\sqrt{\frac{1}{\frac{Кл}{м\cdot\frac{Дж}{Кл}}кг\cdot м}} = Кл\sqrt{\frac{1}{\frac{Кл}{м\cdot\frac{кг\cdot м^2}{Кл\cdot с^2}}кг\cdot м}} =$$

$$= Кл\sqrt{\frac{м^2}{Кл^2 с^2}} = \frac{м}{с}$$

Поводим расчет:

$$r_{\min} = 1,6\cdot 10^{-19}\sqrt{\frac{19}{2\pi\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 100}} = 9,35\cdot 10^{-15}\text{ м=9,35фм}$$

$$v = 1,6\cdot 10^{-19}\sqrt{\frac{19}{\pi\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 4\cdot 1,66\cdot 10^{-27}\cdot 9,35\cdot 10^{-15}}} = 1,68\cdot 10^{7}\text{ м/с=16,8Мм/с}$$

Ответ: $r_{\min} = 9{,}35$фм,

$v =$ 16,8Мм/с