РАЗБОР ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО ТУРА
ОЛИМПИАДЫ «СПЕКТР» (МАТЕМАТИКА)

1. В квадратной матрице третьего порядка элементами являются целые числа от 0 до 8, каждое число используется ровно один раз. Определите какой-нибудь вариант размещения указанных чисел, при котором определитель матрицы будет принимать наименьшее возможное значение по абсолютной величине.

Решение. Искомый значение неотрицательно, поэтому достаточно найти вариант матрицы, для которой определитель равен нулю. **Ответ: например,** $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$**.**

2. Докажите, что неравенство $x^{2014} + x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^{2014}} \geq 2$ **выполняется при всех действительных** x **(**$x \neq 0$**).**

Решение. 1. Сгруппируем слагаемые в правой части

$$\left(x^{2014} + \frac{1}{x^{2014}}\right) + \left(x^8 + \frac{1}{x^4}\right) - \left(x^5 + \frac{1}{x}\right) \geq 2;$$

$$\left(x^{2014} + \frac{1}{x^{2014}}\right) + x^2 \cdot \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - x^2 \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \geq 2;$$

$$\left(x^{2014} + \frac{1}{x^{2014}}\right) + x^2 \cdot \left(\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\right) \geq 2 \ (*).$$

Сумма двух положительных взаимно обратных не меньше 2, поэтому $x^{2014} + \frac{1}{x^{2014}} \geq 2$.

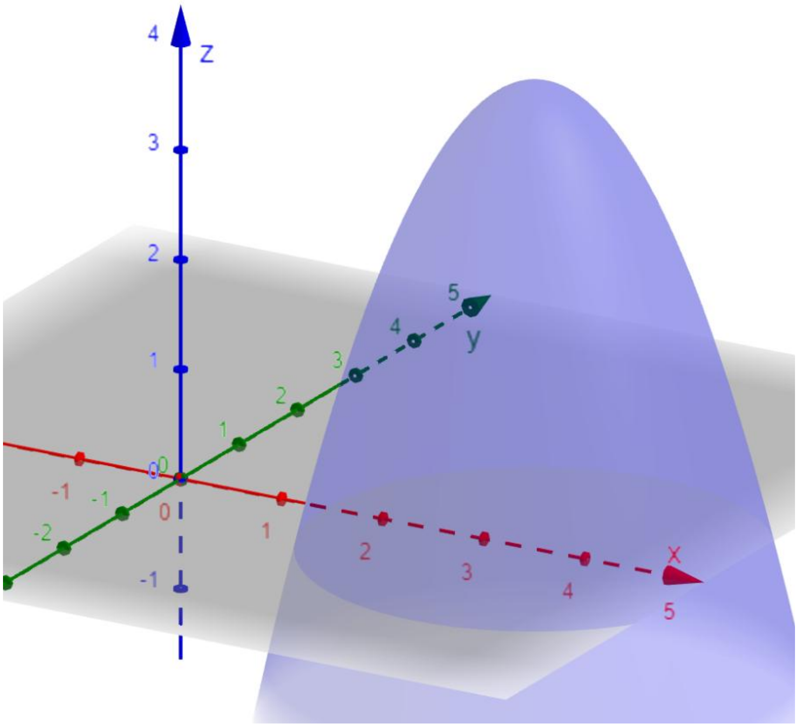
Выполним оценку выражения $\left(\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\right)$. Пусть $x^3 + \frac{1}{x^3} = t$, где $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Тогда, рассматриваемое выражение $f(t) = t^2 - t - 2$. Где $t_{\text{вершины}} = 0{,}5$.

При $t \in (-\infty; -2]$ получим $f(t) \geq f(-2) = 4$.

При $t \in [2; +\infty)$ получим $f(t) \geq f(2) = 0$.

Следовательно, $f(t) \geq 0$, при $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Неравенство (*), а следовательно, и исходное неравенство, доказано.

3. Определите объём фигуры, образованный всеми точками (x**;** y**;** z**), удовлетворяющими двойному неравенству** $0 \leq z \leq -x^2 - y^2 + 7x - 8$**.**



Решение. 1. В сечении данной фигуры плоскостью параллельной плоскости $z = 0$ получается окружность

$(x - 3{,}5)^2 + y^2 = 4{,}25 - z$.

2. Формула объёма фигуры с сечением площадью $S(z)$: $V = \int_a^b S^2(z)dz$.

3. В рассматриваемом случае объём равен $V = \pi \int_0^{4,25} R^2 dz = \pi \int_0^{4,25} (4{,}25 - z)dz = \pi \left(4{,}25z - \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{4,25} = \left(4{,}25^2 - \frac{4{,}25^2}{2}\right)\pi = \frac{4{,}25^2}{2}\pi =$

$= 9{,}03125\pi$.

Ответ: 9,03125π.

4. При каких натуральных n множество натуральных чисел можно разбить на тройки чисел так, чтобы произведение чисел в каждой тройке было n-й степенью некоторого натурального числа?

Решение. 1. Если $n = 1$, то любое разбиение на тройки чисел удовлетворяет условию задачи.

2. Если $n \geq 2$. Выбираем тройки натуральных чисел последовательно одну за другой. Первых два числа A и B каждой пары выбираем как наименьшие среди еще не выбранных. Третье число в каждой тройке $C = (A \cdot B)^{n-1}$, это число ранее не было выбрано (за исключением случая $n = 2$), так как значения $A \cdot B$ ранее рассматривались меньшие, чем на текущем шаге. В случае $n = 2$ первую тройку выбираем в виде (1; 2; 8), далее процесс аналогичен остальным случаям. Описанный бесконечный процесс даст в результате нужное разбиение на тройки. Вот пример начала процесса разбиения на тройки: (1; 2; 2^{n-1}), (3; 4; 12^{n-1}), …

Ответ: при любом натуральном n.

5. Вычислите предел $\lim_{n\to\infty}\left(\cos^2\left(\pi\sqrt{9n^2+n}\right)\right)$.

Решение. 1. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+n} - 3n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^2+n-9n^2}{\sqrt{9n^2+n}+3n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{9n^2+n}+3n}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{n}}+3}\right) = \frac{1}{6}$.

Второй способ.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+n} - 3n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9+\frac{1}{n}}-3}{\frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9+\frac{1}{n}}-3\right)'}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2n^2\sqrt{9+\frac{1}{n}}}}{-\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{9+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{9n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\left(3n + \frac{1}{6}\right)$.

2. Таким образом, $\lim_{n\to\infty}\left(\cos^2\left(\pi\sqrt{9n^2+n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\cos^2\left(\pi\left(3n+\frac{1}{6}\right)\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\cos^2\left(3\pi n+\frac{\pi}{6}\right)\right)=$

$=\lim_{n\to\infty}\left(cos^2\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\frac{\pi}{6}=0{,}75.$ **Ответ: 0,75.**

6. Пусть $n \geq 1$, $t \geq 0$ – целые числа. Рассмотрим сумму $S=\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n+k}\cdot\frac{k^t}{k!(n-k)!}\right)$, причем условимся, что $0^0 = 1$.

Докажите, что S является целым неотрицательным числом при любых целых $n \geq 1$, $t \geq 0$.

Доказательство. Обозначим

$$S(n,t)\ =\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_n^k k^t,\ n\geq 1,\ t\geq 0.$$

Докажем соотношение для $n \geq 2$, $t \geq 1$:

$$S(n, t) = n\cdot(S(n, t-1) + S(n-1, t-1)). \qquad (1)$$

Действительно, распишем это выражение

$$S(n,t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_n^k k^t=n\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_{n-1}^{k-1}k^{t-1}+\ n^{t-1}\right)=$$

$$=n\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}\left(C_n^k-C_{n-1}^k\right)k^{t-1}+\ n^{t-1}\right)=$$

$$=n\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_n^k k^{t-1}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1+k}C_{n-1}^k k^{t-1}+\ n^{t-1}\right)=$$

$$=n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_n^k k^{t-1}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1+k}C_{n-1}^k k^{t-1}\right)=$$

$$=n\cdot(S(n, t-1) + S(n-1, t-1)),$$

причем первоначально убирается нулевое слагаемое при $k = 0$, а потом добавляется и вычитается единица (при $t = 1$) или 0 (поэтому итоговые суммы всё-таки начинаются с $k = 0$).

Докажем двойной индукцией по $n \geq 1$ и по $t \geq 0$, что $S(n, t) = 0$ при $n > t$. База индукции $S(n, 0) = 0$ очевидна, так как $S(n, 0)$ с точностью до знака равно сумме

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0$$

Шаг индукции следует из соотношения (1). Поделив $S(n, t)$ на $n!$, докажем пункт “1” для $t < n$.

Теперь докажем индукцией, что $S(n, n) = n!$ для любого $n \geq 1$. База индукции $S(1, 1) = 1$ очевидна. Пусть $n \geq 2$. Тогда

$$S(n, n) = n(S(n, n-1) + S(n-1, n-1)) = nS(n-1, n-1) = n\cdot(n-1)! = n!$$

по предположению индукции, причем мы воспользовались тем, что $S(n, n-1) = 0$.

Введём обозначения

$$U(n, l) = S(n, n + l),\ n \geq 1 \text{ и по } l \geq 0,$$

$$P(n,l) = \frac{U(n,\ l)}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n+k}\cdot\frac{k^{n+l}}{k!(n-k)!}\right).$$

При этом для $n \geq 1$ и по $l \geq 0$ имеем

$$U(n, 0) = n!, P(n, 0) = 1,$$

$$U(1, l) = 1, P(1, l) = 1.$$

Стоит отметить, что равенство (1) запишется в виде

$$U(n, l) = n(U(n, l-1) + U(n-1, l)).$$

Из этого соотношения можно получить две рекуррентные формулы для $U(n, l)$.

Пусть $n \geq 2$ и по $l \geq 1$. Тогда

$$U(n, l) = nU(n-1, l) + nU(n, l-1)=$$

$$= nU(n-1, l) + n^2U(n-1, l-1) + n^2U(n, l-2) = \ldots =$$

$$= nU(n-1, l) + \ldots + n^mU(n-1, l-m+1) + \ldots + n^lU(n-1, 1) + n^lU(n, 0) =$$

$$= n\sum_{m=0}^{l}(n^{l-m}\cdot U(n-1,m)) + n^lU(n,0) - n^{l+1}U(n-1,0) =$$

$$= n\sum_{m=0}^{l}(n^{l-m}\cdot U(n-1,m)) + n^l\cdot n! - n^{l+1}\cdot(n-1)! = n\sum_{m=0}^{l}(n^{l-m}\cdot U(n-1,m)).$$

Если $l = 0$, то

$$U(n, 0) = n! = n\cdot(n-1)! = n\cdot U(n-1, 0).$$

Пусть опять же $n \geq 2$ и по $l \geq 1$. Тогда

$$U(n, l) = nU(n, l-1) + nU(n-1, l) =$$

$$= nU(n, l-1) + n(n-1)U(n-1, l-1) + n(n-1)U(n-2, l) = \ldots =$$

$$= nU(n, l-1) + \ldots + \frac{n!}{(m-1)!}U(m,\ l-1) + \cdots + n!\,U(2,\ l-1) + n!\,U(1,l) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{(m-1)!}U(m,\ l-1) + n!\,U(1,\ l) - n!\,U(1,\ l-1) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{(m-1)!}U(m,\ l-1).$$

При $n = 1$, $l \geq 1$ имеем

$$U(1,l) = 1 = \frac{1!}{0!}\,U(1,l-1).$$

Таким образом,

$$U(n,l) = n\sum_{m=0}^{l}n^{l-m}U(n-1,m)\,, n\ \geq 2, l\ \geq 0,$$

$$U(n,l) = \sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{(m-1)!}U(m,\ l-1)\,,\qquad n\ \geq 1, l\ \geq 1.$$

Отсюда можем получить выражения для $P(n, l)$:

$$U(n,l) = \sum_{m=0}^{l} n^{l-m} P(n-1, m), n \geq 2, l \geq 0,$$

$$U(n,l) = \sum_{m=1}^{n} mP(m,\ l-1), \qquad n \geq 1, l \geq 1.$$

Проводя индукцию по l и по n и пользуясь тем, что $P(n, 0) = 1$, из второго равенства получим, что $P(n,\ l)$ является целым неотрицательным числом, что окончательно доказывает пункт “а” (аналогичное рассуждение можно провести и с первым равенством).