СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «СПЕКТР-24»
ЛИПЕЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ П.П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ТУРА
по МАТЕМАТИКЕ

1. В квадратной матрице третьего порядка элементами являются целые числа от 0 до 8, каждое число используется ровно один раз. Определите какой-нибудь вариант размещения указанных чисел, при котором определитель матрицы будет принимать наименьшее возможное значение по абсолютной величине.

2. Докажите, что неравенство $x^{2014} + x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^{2014}} \geq 2$ выполняется при всех действительных x ($x \neq 0$).

3. Определите объём фигуры, образованный всеми точками (x; y; z), удовлетворяющими двойному неравенству $0 \leq z \leq -x^2 - y^2 + 7x - 8$.

4. При каких натуральных n множество натуральных чисел можно разбить на тройки чисел так, чтобы произведение чисел в каждой тройке было n-й степенью некоторого натурального числа?

5. Вычислите предел $\lim_{n\to\infty}\left(\cos^2\left(\pi\sqrt{9n^2+n}\right)\right)$.

6. Пусть $n \geq 1$, $t \geq 0$ – целые числа.

Рассмотрим сумму $S = \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n+k} \cdot \frac{k^t}{k!(n-k)!}\right)$, причем условимся, что $0^0 = 1$.

Докажите, что S является целым неотрицательным числом при любых целых $n \geq 1$, $t \geq 0$.