

УДК 537.311.322

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ УДЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЕЙ ДВУСЛОЙНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПЛАСТИН И ПЛЕНОК

А.Н. Власов, В.В. Филиппов

Аннотация

Представлен быстрый способ определения удельных электропроводностей тонких полупроводниковых изотропных пластин на основе известного четырехзондового метода. Предложенный метод теоретически обоснован путем решения соответствующих краевых задач электродинамики, отличается простотой измерений и расчётов, не требует применения сложной аппаратуры, выполнен учет граничных условий.

Широкое применение в современной полупроводниковой электронике получили слоистые структуры [1-3]. Слоистые полупроводники могут быть использованы для создания лазеров, модуляторов света, фотодетекторов и других функциональных устройств, управляемых магнитным полем. Применение этих материалов в электронике требует разработки простых и надежных методов исследования их физических свойств. В связи с этим разработка методов исследования характеристик изотропных полупроводников становится все более актуальной.

В данной работе предложена методика измерений удельных электропроводностей σ_1 и σ_2 двуслойных n+/n и p+/p полупроводниковых структур (при отсутствии p-n-перехода между слоями) четырехзондовым методом с линейным расположением зондов, проведена оценка применимости данного метода и погрешности измерений.

Первоначально определим теоретическое распределение потенциала при зондовых измерениях на постоянном токе. В установившемся режиме при отсутствии источников и стоков зарядов векторы плотности тока \mathbf{j} , напряженности \mathbf{E} и потенциал поля φ связаны соотношениями [4]:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (1)$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение для потенциала:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

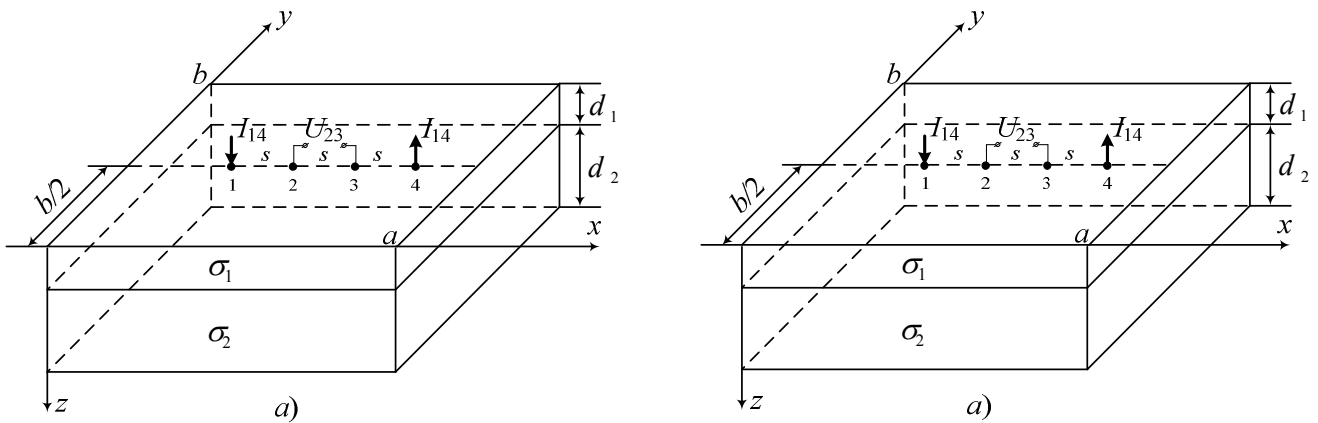


Рис. 1. Схема расположения зондов на прямоугольном образце

Граничные условия следуют из требования, что нормальная составляющая плотности тока на поверхности образца всюду равна нулю кроме точек под токовыми электродами [4]. Для расположения зондов согласно рис. 1,а граничные условия принимают вид:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0,a} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|_{x=0,a} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right|_{y=0,b} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=d} = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{I_{14}}{\sigma_1} [\delta(x - x_1)\delta(y - y_1) - \delta(x - x_4)\delta(y - y_4)] \quad (4)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, использование которой оправдано для токовых зондов с малой площадью входных сечений; φ_1 и φ_2 - функции распределения потенциала в областях с электропроводностями σ_1 и σ_2 соответственно; $(x_1, y_1), (x_4, y_4)$ – координаты токовых зондов. В нашем случае эквидистантного зондового пробника (рис. 1а) имеем $x_1 = a/2 - 3s/2, x_4 = a/2 + 3s/2, y_1 = y_4 = b/2$.

Кроме того, нам необходимо учесть условия равенства потенциала и нормальной составляющей плотности тока на границе раздела полупроводников:

$$\left(\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=d_1} \quad (5)$$

Данная краевая задача (2) – (5) решается методом разделения переменных. В результате окончательное выражение для потенциала φ на поверхности образца представимо в виде двойного ряда Фурье

$$\varphi_1(x, y) = \frac{I_{14}}{\sigma_1 ab} \times \sum_{\substack{k=0,2,4,\dots \\ n=1,3,5,\dots}}^{\infty} \left[\Theta_k \left((-1)^{\frac{n+k-1}{2}} \right) \frac{1}{\eta_{nk}} \frac{2 \sin\left(\frac{\alpha_n 3s}{2}\right) \left(\text{ch}(\eta_{nk} d_1) \text{ch}(\eta_{nk} d_2) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{sh}(\eta_{nk} d_1) \text{sh}(\eta_{nk} d_2) \right)}{\text{sh}(\eta_{nk} d_1) \text{ch}(\eta_{nk} d_2) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{ch}(\eta_{nk} d_1) \text{sh}(\eta_{nk} d_2)} \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_k y) \right], \quad (6)$$

где

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_k = \frac{\pi k}{b}, \quad \eta_{nk} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_k^2}, \quad \Theta_k = \begin{cases} 2, & k = 0; \\ 4, & k \neq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Полученное распределение потенциала позволяет найти теоретическую разность потенциалов между зондами 2 и 3:

$$U_{23} = \frac{I_{14}}{\sigma_1 ab} L_1, \quad (8)$$

$$L_1 = \sum_{\substack{k=0,2,4,\dots \\ n=1,3,5,\dots}}^{\infty} \left[\Theta_k \frac{1}{\eta_{nk}} \cdot \frac{4 \sin\left(\frac{\alpha_n 3s}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha_n s}{2}\right) \cdot (\operatorname{ch}(\eta_{nk} d_1) \operatorname{ch}(\eta_{nk} d_2) + \gamma \operatorname{sh}(\eta_{nk} d_1) \operatorname{sh}(\eta_{nk} d_2))}{\operatorname{sh}(\eta_{nk} d_1) \operatorname{ch}(\eta_{nk} d_2) + \gamma \operatorname{ch}(\eta_{nk} d_1) \operatorname{sh}(\eta_{nk} d_2)} \right], \quad (9)$$

где

$$\gamma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (10)$$

Для второго измерения расположим зондовый пробник на той же грани образца вдоль линии, параллельной оси x (рис. 1, б: $x_5 = a/2 - 3s/2$; $x_8 = a/2 + 3s/2$, $y_5 = y_8 = b/2$), измеряем ток I_{58} и разность потенциалов U_{67} . Аналогично получаем выражение для взаимосвязи тока I_{58} и напряжения U_{67} :

$$U_{67} = \frac{I_{58}}{\sigma_2 ab} L_2, \quad (11)$$

где L_2 – соответствующий поправочный множитель для данного случая расположения зондов. В случае тонких образцов получаем:

$$L_2 = \sum_{\substack{k=0,2,4,\dots \\ n=1,3,5,\dots}}^{\infty} \left[\Theta_k \frac{1}{\eta_{nk}} \cdot \frac{4 \sin\left(\frac{\alpha_n 3s}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha_n s}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{ch}(\eta_{nk} d_2) \operatorname{ch}(\eta_{nk} d_1) + \frac{1}{\gamma} \operatorname{sh}(\eta_{nk} d_2) \operatorname{sh}(\eta_{nk} d_1) \right)}{\operatorname{sh}(\eta_{nk} d_2) \operatorname{ch}(\eta_{nk} d_1) + \frac{1}{\gamma} \operatorname{ch}(\eta_{nk} d_2) \operatorname{sh}(\eta_{nk} d_1)} \right]. \quad (12)$$

По данным измерений определяем величину безразмерного параметра Q :

$$Q = \frac{R_1}{R_2} = \frac{U_{23} / I_{14}}{U_{67} / I_{58}}, \quad (13)$$

который понадобится для расчета значения γ , необходимого для вычисления значений удельной электропроводности.

Согласно выражениям (8) и (11), «теоретическая» зависимость $Q(\gamma)$ имеет вид:

$$Q(\gamma) = \gamma \frac{L_1}{L_2}. \quad (14)$$

Таким образом, предлагаемая методика измерения удельной электропроводности двуслойной структуры сводится к следующему.

1. При некотором значении тока I_{14} измерить напряжение U_{23} , затем, используя тот же линейный зондовый пробник при значении тока I_{58} , измерить напряжение U_{67} (рис. 1).

2. Вычислить из эксперимента величину параметра $Q = R_1/R_2$ согласно выражению (13).

3. По графику зависимости $Q(\gamma)$ определить значение параметра γ путем сопоставления «теоретического» и экспериментального значений параметра Q (полученных по формулам (14) и (13) соответственно). Для некоторых значений отношений a/s , b/s нами была построена зависимость Q от параметра неоднородности γ и представлена на рис. 2.

4. Определить значения поправочных множителей L_1 и L_2 по формулам (10) и (12).

5. Вычислить значения электропроводностей σ_1 и σ_2 по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{I_{23}}{U_{23}ab} L_1, \quad \sigma_2 = \frac{I_{58}}{U_{67}ab} L_2 \quad (15)$$

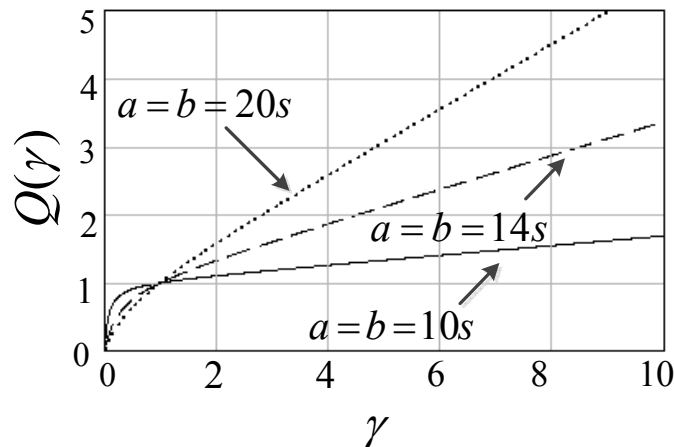


Рис. 2. График зависимости величины Q от коэффициента неоднородности электропроводности γ при $a=b=20d_1=20d_2$ и различных s

Предлагаемая методика определения электропроводностей подобна методике, описанной в работах [5-7] для анизотропных полупроводников.

Представляет практический интерес определение величин поправочных множителей L_1 и L_2 для неограниченного образца ($a/s \rightarrow \infty$, $b/s \rightarrow \infty$). В результате вычисления соответствующих пределов получено, что в случае бесконечной пластины выражения (15) представляются в виде:

$$\sigma_1 = 0.2206 \frac{I_{14}}{(d_1 + \gamma \cdot d_2) \cdot U_{23}}, \quad \sigma_2 = 0.2206 \frac{I_{58}}{(d_1 + d_2 / \gamma) \cdot U_{67}} \quad (16)$$

Для изотропных образцов ($\sigma_2 = \sigma_1 = \sigma$, $\gamma = 1$) получаем известную формулу для удельного сопротивления при измерениях с помощью линейного четырехзондового пробника [8, 9]:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = 4.532 \frac{U_{23}}{I_{14}} d \quad (17)$$

Преимущество предложенного метода состоит в том, что для его применения не требуется создания омических контактов к образцу, нанесение которых вызывает определённые сложности, а также зачастую приводит к невозможности дальнейшего использования полупроводниковой структуры. Погрешность предлагаемой методики в основном определяется погрешностью известного четырехзондового метода [8, 9].

Благодарности. Работа поддержана Минобрнауки, проект 2.2822.2011.

ЛИТЕРАТУРА

1. Filimonov, S.N. Influence of strain on binding energies of Si atoms at Ge(111) surfaces [Text] / S.N. Filimonov, B. Voigtlander // Surface Science – 2002. – V. 512. – №1. – P. L335-L340.
2. Исследование влияния углерода на свойства гетероструктур Si/SiGe [Текст] / М.Я. Валах [и др.] // ФТП. – 2003. – Т. 37. – № 4. – С. 460-464.
3. Калинин, Ю.Е. Электрические свойства многослой металл-полупроводник с аморфной структурой [Текст] / Ю.Е. Калинин, К.Г. Королев, А.В. Ситников // Письма в ЖТФ. – 2006. – Т. 32. – № 6. – С. 61-67.
4. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред [Текст] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2003. – 656 с.
5. Филиппов, В.В. Восьмизондовый метод совместных измерений электропроводности и коэффициента Холла анизотропных полупроводниковых пленок [Текст] / В.В. Филиппов, Н.Н. Поляков, С.В. Мицук // Известия вузов. Электроника. – 2006. – № 4. – С. 81-87.
6. Филиппов, В.В. Методика определения компонент тензора удельной электропроводности анизотропных полупроводниковых пленок [Текст] / В.В. Филиппов // Приборы и техника эксперимента. – 2008. – № 4 – С. 150-153.
7. Филиппов, В.В. Четырехзондовый метод совместных измерений компонент тензора удельной электропроводности и коэффициента Холла анизотропных полупроводниковых пленок [Текст] / В.В. Филиппов // Приборы и техника эксперимента. – 2012. – № 1. – С. 112-117.
8. Батавин, В.В., Измерение параметров полупроводниковых материалов и структур [Текст] / В.В. Батавин, Ю.А. Концевой, Ю.В. Федорович. – М.: Радио и связь, 1985. – 264 с.
9. Павлов, Л.П. Методы измерения параметров полупроводниковых материалов [Текст] / Л.П. Павлов. – М.: Высшая школа, 1987. – 240 с.

УДК 537.635; 537.611.43

ЭЛЕКТРОННЫЙ ПАРАМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС «ОРТОРОМБИЧЕСКИХ» $^8S_{7/2}$ – ИОНОВ

К.К. Ермакович

Аннотация

Рассмотрен спектр ЭПР парамагнитных центров $RbCl-Eu$ при комнатной температуре. Тонкая структура спектра описана спин-гамильтонианом комплекса европий-вакансия. Измерена и проанализирована температурная зависимость константы b_{20} .

Введение

До настоящего времени ЭПР двухвалентного европия весьма интенсивно изучался в различных щелочно-галогидных кристаллах (ЩГК). В закаленных образцах (отжиг при температуре порядка 700 К и быстрое охлаждение до 300 К) основным парамагнитным дефектом является комплекс Eu^{2+} – ближайшая катионная вакансия (рис. 1а). На рис. 1б показаны все 12 возможных ориентаций комплекса. Так как Rb занимает промежуточное положение в гомологическом ряду Na, K, Rb, Cs, а CsCl имеет отличную от типичной для ЩГК объемноцентрированную решетку, исследование ЭПР в $RbCl-Eu^{2+}$ представляет значительный интерес. Необходимо отметить также существенное отличие констант кристаллического поля, найденных разными авторами.

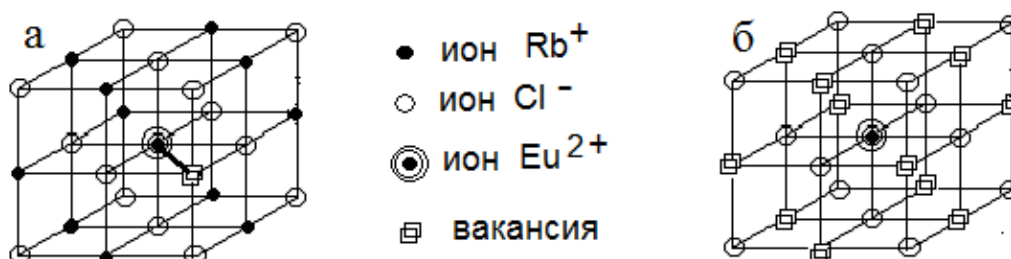


Рис.1. Модель парамагнитного центра европия в монокристалле $RbCl$

Исходя из этого, полезно привести основные результаты расчетов ЭПР-спектра комплекса Eu^{2+} – вакансия, имеющего орторомбическую симметрию.

Эксперимент и вычисления

В качестве объекта исследования был выбран монокристалл $RbCl$, выращенный по методу Стокбаргера в вакууме и содержащий в расплаве 0,05 моль % европия с естественным изотопным составом. Измерения проводились на ЭПР-спектрометре проходного типа с высокочастотной модуляцией.

Спектр незакаленного образца $RbCl-Eu^{2+}$ при температуре 300 К приведен на рис. 2 и состоит из определяемого ориентацией кристалла в магнитном поле числа «тонких» групп сверхтонких линий, соответствующих естественному изотопному составу европия. Выбранный объект относится к той группе ЩГК, где закалка приводит к незначительному росту интенсивности. Это обусловлено различной способностью к агрегации комплексов Eu^{2+} -вакансия и различной скоростью агрегации [1].

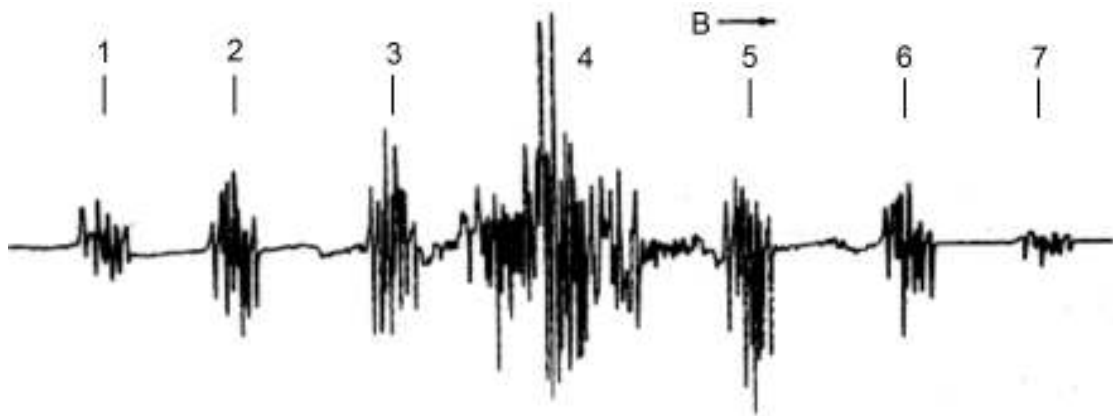


Рис.2. ЭПР спектр монокристалла $RbCl-Eu^{2+}$. $T = 300 K$;
 $\nu = 9523,0$ МГц; $B // [001]$.

Расчет проведен на основе спин-гамильтониана:

$$H = g \mu_B B S + \sum \sum B_n^m O_n^m + {}^{151}AIS + {}^{153}AIS, \quad (1)$$

где g – g -фактор, $\mu_B = 9.274 \cdot 10^{-24}$ Дж/Т – магнетон Бора, B – индукция постоянного магнитного поля, S и I – электронный и ядерный спины, соответственно ($S = 7/2$; $I = 5/2$), O_n^m – эквивалентные операторы, B_n^m – константы ($n, m = 2, 4, 6$; $n \geq m$). Сверхтонкая структура спектра и константы ${}^{151}A$ и ${}^{153}A$ обсуждалась ранее [2]. Необходимые для расчетов эквивалентные операторы приведены ниже [3]:

$$\begin{aligned} O_2^0 &= 3 S_z^2 - S(S+1) \\ O_2^2 &= (S_+^2 + S_-^2) / 2 \\ O_4^0 &= 35 S_z^4 - [30 S(S+1) - 25] S_z^2 - 6 S(S+1) + 3 S^2 (S+1)^2 \\ O_4^2 &= \{ [7 S_z^2 - S(S+1) - 5] (S_+^2 + S_-^2) + \\ &\quad + (S_+^2 + S_-^2) [7 S_z^2 - S(S+1) - 5] \} / 4 \\ O_4^4 &= (S_+^4 + S_-^4) / 2 \\ O_6^0 &= 231 S_z^6 - 105 [3 S(S+1) - 7] S_z^4 + \\ &\quad + [105 S^2 (S+1)^2 - 525 S(S+1) + 294] S_z^2 - \\ &\quad - 5 S^3 (S+1)^3 + 40 S^2 (S+1)^2 - S(S+1) \\ O_6^2 &= \{ [33 S_z^4 - 18 S(S+1) S_z^2 - 123 S_z^2 + S^2 (S+1)^2 + \\ &\quad + 10 S(S+1) + 102] (S_+^2 + S_-^2) + \\ &\quad + (S_+^2 + S_-^2) \{ [33 S_z^4 - 18 S(S+1) S_z^2 - 123 S_z^2 + \\ &\quad + S^2 (S+1)^2 + 10 S(S+1) + 102] \} \} / 4 \\ O_6^4 &= \{ [11 S_z^2 - S(S+1) - 38] (S_+^4 + S_-^4) + \\ &\quad + (S_+^4 + S_-^4) [11 S_z^2 - S(S+1) - 38] \} / 4 \\ O_6^6 &= (S_+^6 + S_-^6) / 2 \end{aligned}$$

В системе координат центра, ориентация которой определяется углами Эйлера [3] $\varphi = \alpha = 0$, $\theta = \beta = \pi/2$:

$$\begin{aligned} V &= -B_2^0 (O_2^0 - 3 O_2^2) / 2 + B_2^2 (O_2^0 + O_2^2) / 2 + \\ &\quad + B_4^0 (3 O_4^0 - 20 O_4^2 + 35 O_4^4) / 8 - \\ &\quad - B_4^2 (O_4^0 - 4 O_4^2 - 7 O_4^4) / 8 + B_4^4 (O_4^0 + 4 O_4^2 - O_4^4) / 8 - \\ &\quad - B_6^0 (10 O_6^0 - 105 O_6^2 + 126 O_6^4 - 231 O_6^6) / 32 + \\ &\quad + B_6^2 (2 O_6^0 - 17 O_6^2 + 6 O_6^4 + 33 O_6^6) / 32 - \\ &\quad - B_6^4 (2 O_6^0 - 5 O_6^2 - 26 O_6^4 - 11 O_6^6) / 32 + \\ &\quad + B_6^6 (2 O_6^0 + 15 O_6^2 + 6 O_6^4 + O_6^6) / 32 \end{aligned} \quad (2)$$

Собственные значения спин-гамильтониана (1) находятся по методу теории возмущений с учетом поправок второго порядка

$$W_M = W_M^0 + \langle M|V|M\rangle + \sum(\langle M|V|N\rangle\langle N|V|M\rangle)/(W_M^0 - W_N^0), \quad (3)$$

где W_M^0 и W_N^0 – энергия невозмущенных зеемановских уровней $^8S_{7/2}$ состояния, а $|M\rangle$ и $|N\rangle$ – волновые функции этих уровней. Соответствующие матрицы приведены ниже:

	7/2	5/2	3/2	1/2	-1/2	-3/2	-5/2	-7/2
7/2	-21/2 w1		$\sqrt{21}/2$ w2					
5/2		-3/2 w1		$3\sqrt{5}/2$ w2				
3/2	$\sqrt{21}/2$ w2		9/2 w1		$\sqrt{15}$ w2			
1/2		$3\sqrt{5}/2$ w2		15/2 w1		$\sqrt{15}$ w2		
-1/2			$\sqrt{15}$ w2		15/2 w1		$3\sqrt{5}/2$ w2	
-3/2				$\sqrt{15}$ w2		9/2 w1		$\sqrt{21}/2$ w2
-5/2					$3\sqrt{5}/2$ w2		-3/2 w1	
-7/2						$\sqrt{21}/2$ w2		-21/2 w1

	7/2	5/2	3/2	1/2	-1/2	-3/2	-5/2	-7/2
7/2	105/2 w3		$-15\sqrt{21}$ w4		$3\sqrt{35}/2$ w5			
5/2		-195/2 w3		$-24\sqrt{5}$ w4		$15\sqrt{3}/2$ w5		
3/2	$-15\sqrt{21}$ w4		-45/2 w3		$12\sqrt{15}$ w4		$15\sqrt{3}/2$ w5	
1/2		$-24\sqrt{5}$ w4		135/2 w3		$12\sqrt{15}$ w4		$3\sqrt{35}/2$ w5
-1/2	$3\sqrt{35}/2$ w5		$12\sqrt{15}$ w4		135/2 w3		$-24\sqrt{5}$ w4	
-3/2		$15\sqrt{3}/2$ w5		$12\sqrt{15}$ w4		-45/2 w3		$-15\sqrt{21}$ w4
-5/2			$15\sqrt{3}/2$ w5		$-24\sqrt{5}$ w4		-195/2 w3	
-7/2				$3\sqrt{35}/2$ w5		$-15\sqrt{21}$ w4		105/2 w3

	7/2	5/2	3/2	1/2	-1/2	-3/2	-5/2	-7/2
7/2	-315/4 w6		15√21/4 w7		-45√35/4 w8		45√7/4 w9	
5/2		1575/4 w6		-63√5/4 w7		105√3/4 w8		45√7/4 w9
3/2	15√21/4 w7		-2835/4 w6		21√15/4 w7		105√3/4 w8	
1/2		-63√5/4 w7		1575/4 w6		21√15/4 w7		-45√35/4 w8
-1/2	-45√35/4 w8		21√15/4 w7		1575/4 w6		-63√5/4 w7	
-5/2		105√3/4 w8		21√15/4 w7		-2835/4 w6		15√21/4 w7
-7/2	45√7/4 w9		105√3/4 w8		-63√5/4 w7		1575/4 w6	
		45√7/4 w9		-45√35/4 w8		15√21/4 w7		-315/4 w6

Здесь введены обозначения: $w1 = B_2^0 - B_2^2$; $w2 = 3B_2^0 + B_2^2$;
 $w3 = 3B_4^0 - B_4^2 + B_4^4$; $w4 = 5B_4^0 - B_4^2 - B_4^4$; $w5 = 35B_4^0 + 7B_4^2 - B_4^4$;
 $w6 = 5B_6^0 - B_6^2 + B_6^4 - B_6^6$; $w7 = 105B_6^0 - 17B_6^2 + 5B_6^4 + 15B_6^6$;
 $w8 = 63B_6^0 - 3B_6^2 - 13B_6^4 + 3B_6^6$; $w9 = 231B_6^0 + 33B_6^2 + 11B_6^4 + B_6^6$.

В результате диагонализации получается следующая система энергетических уровней (без учета сверхтонкого взаимодействия):

$$\begin{aligned}
 W_{\pm 7/2} &= \pm 7 g \mu_B B_0/2 - 21(w1)/2 \pm 21(w2)^2/8 \Delta + 105(w3)/2 - 315(w6)/4 \\
 W_{\pm 5/2} &= \pm 5 g \mu_B B_0/2 - 3(w1)/2 \pm 45(w2)^2/8 \Delta - 195(w3)/2 + 1575(w6)/4 \\
 W_{\pm 3/2} &= \pm 3 g \mu_B B_0/2 + 9(w1)/2 \pm 39(w2)^2/8 \Delta - 45(w3)/2 - 2835(w6)/4 \\
 W_{\pm 1/2} &= \pm g \mu_B B_0/2 + 15(w1)/2 \pm 15(w2)^2/8 \Delta + 135(w3)/2 + 1575(w6)/4
 \end{aligned}$$

$\Delta = g \mu_B B$ - разность энергий состояний в соответствующем магнитном поле B с отличными от нуля недиагональными элементами в первой из матриц.

Однако соотношение интенсивностей «тонких» линий в спектрах ЭПР при гелиевых и более низких температурах [4] указывают на инверсный порядок расположения энергетических уровней, который может быть получен выбором в (1) отрицательного знака оператора кристаллического поля [5]. В этом случае структура энергетических уровней будет такой, как на рис. 3, а их положение определится выражениями:

$$\begin{aligned}
 W_{\pm 7/2} &= \pm 7 g \mu_B B_0/2 + 21(w1)/2 + 21(w2)^2/8 \Delta - 105(w3)/2 + 315(w6)/4 \\
 W_{\pm 5/2} &= \pm 5 g \mu_B B_0/2 + 3(w1)/2 + 45(w2)^2/8 \Delta + 195(w3)/2 - 1575(w6)/4 \\
 W_{\pm 3/2} &= \pm 3 g \mu_B B_0/2 - 9(w1)/2 + 39(w2)^2/8 \Delta + 45(w3)/2 + 2835(w6)/4 \\
 W_{\pm 1/2} &= \pm g \mu_B B_0/2 - 15(w1)/2 + 15(w2)^2/8 \Delta - 135(w3)/2 - 1575(w6)/4
 \end{aligned}$$

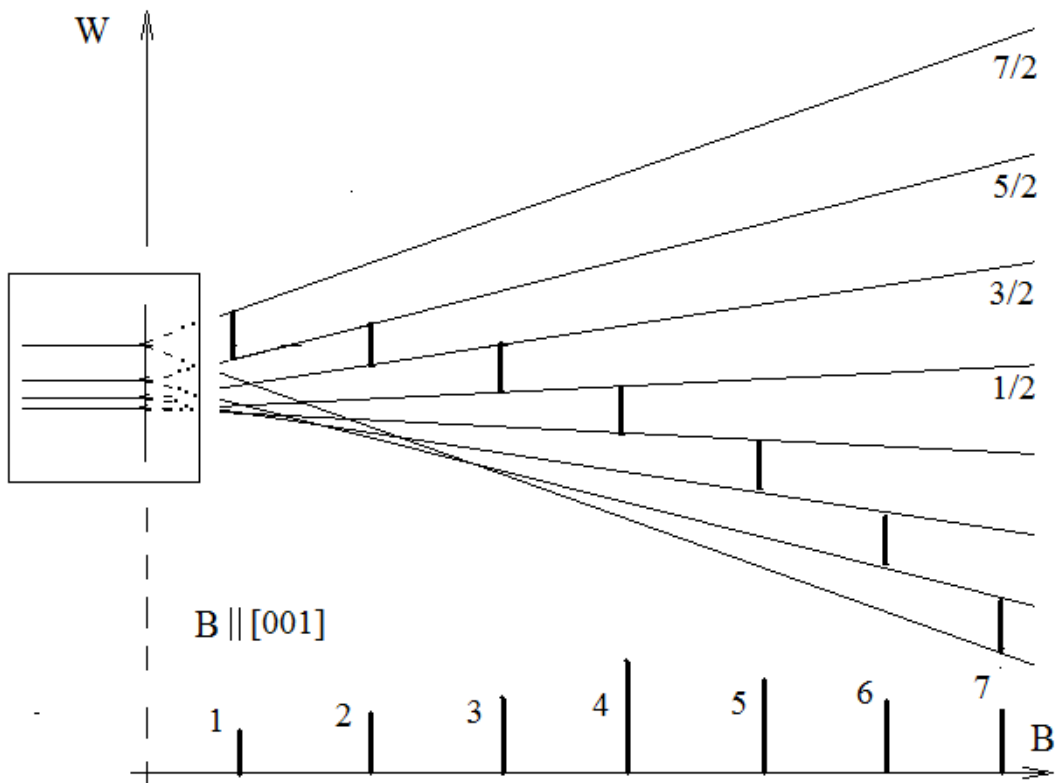


Рис.3. Энергетические уровни и переходы ЭПР состояния $^8S_{7/2}$.
 В рамке изображены гипотетические уровни в нулевом магнитном поле, волновые функции которых в реальности сильно перемешаны

В соответствии с правилами отбора в такой структуре возможны семь зеемановских переходов: 1 - ($7/2 \leftrightarrow 5/2$), 2 - ($5/2 \leftrightarrow 3/2$), 3 - ($3/2 \leftrightarrow 1/2$), 4 - ($1/2 \leftrightarrow -1/2$), 5 - ($-1/2 \leftrightarrow -3/2$), 6 - ($-3/2 \leftrightarrow -5/2$), 7 - ($5/2 \leftrightarrow -7/2$). Этим переходам соответствуют следующие разности энергий ($\Delta W = h\nu$; $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж/Гц):

$$\begin{aligned} \Delta W_1 &= g \mu_B B_0 - 9(w_1) - 3(w_2)^2/(g \mu_B B_1) + 150(w_3) - 945(w_6)/2 \\ \Delta W_2 &= g \mu_B B_0 - 6(w_1) + 3(w_2)^2/(4 g \mu_B B_2) - 75(w_3) + 2205(w_6)/2 \\ \Delta W_3 &= g \mu_B B_0 - 3(w_1) + 3(w_2)^2/(g \mu_B B_3) - 90(w_3) - 2205(w_6)/2 \\ \Delta W_4 &= g \mu_B B_0 + 15(w_2)^2/(4 g \mu_B B_4) \\ \Delta W_5 &= g \mu_B B_0 + 3(w_1) + 3(w_2)^2/(g \mu_B B_5) + 90(w_3) + 2205(w_6)/2 \\ \Delta W_6 &= g \mu_B B_0 + 6(w_1) + 3(w_2)^2/(4 g \mu_B B_6) + 75(w_3) - 2205(w_6)/2 \\ \Delta W_7 &= g \mu_B B_0 + 9(w_1) - 3(w_2)^2/(g \mu_B B_7) - 150(w_3) + 945(w_6)/2 \end{aligned}$$

Значения констант w_1, w_2, w_3, w_6 (обычно в единицах 10^{-4} см^{-1}) находятся из уравнений, определяющих положения «тонких» линий ЭПР спектра:

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0 - 9(v_1) + 3(v_2)^2/B_1 + 150(v_3) - 945(v_6)/2 \\ B_2 &= B_0 - 6(v_1) - 3(v_2)^2/(4 B_2) - 75(v_3) + 2205(v_6)/2 \\ B_3 &= B_0 - 3(v_1) - 3(v_2)^2/B_3 - 90(v_3) - 2205(v_6)/2 \\ B_4 &= B_0 - 15(v_2)^2/(4 B_4) \\ B_5 &= B_0 + 3(v_1) + 3(v_2)^2/B_5 + 90(v_3) + 2205(v_6)/2 \\ B_6 &= B_0 + 6(v_1) + 3(v_2)^2/(4 B_6) + 75(v_3) - 2205(v_6)/2 \\ B_7 &= B_0 + 9(v_1) - 3(v_2)^2/B_7 - 150(v_3) + 945(v_6)/2 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь v_1, v_2, v_3, v_6 имеют размерность магнитной индукции и переводятся в w_1, w_2, w_3, w_6 соотношением $1 \text{ Т} \leftrightarrow 0.936 \text{ см}^{-1}$. Найденные значения констант кристаллического поля следующие (в единицах 10^{-4} см^{-1}): $D = 3B_2^0 = 193.5 \pm 0,5$; $E = B_2^2 = -131.6 \pm 0,8$; $w_3 = 0.496 \pm 0,002$; $w_6 = 0.0030 \pm 0,0001$. g -фактор предполагался изотропным и определялся из спектра порошка, для которого зависимость от ориентации тонкая структура усредняется и остается лишь одна группа сверхтонких линий, соответствующая переходу $1/2 \rightarrow -1/2$ ($g=1.996 \pm 0,001$). Константы сверхтонкого взаимодействия по спектру порошка при 77 К равны $^{151}\text{A} = 33.7 \pm 0,1 \text{ Гс}$ и $^{153}\text{A} = 15.3 \pm 0,1 \text{ Гс}$. Подстановка найденных параметров в (4) дает хорошее согласие теории и эксперимента (в скобках экспериментальные значения; единицы измерения - Гс = 0.1 мТ):

$$\begin{aligned} B_1 &= 3407.9 - 1885.6 + 8.2 + 79.5 - 1.5 = 1608.5 & (1608.9) \\ B_2 &= 3407.9 - 1257 - 1.6 - 39.7 + 3.5 = 2113.1 & (2112.8) \\ B_3 &= 3407.9 - 628.5 - 4.8 - 47.7 - 3.5 = 2723.4 & (2723.1) \\ B_4 &= 3407.9 - 4.8 = 3403.1 \\ B_5 &= 3407.9 + 628.5 - 3.2 + 47.7 + 3.5 = 4084.4 & (4084.5) \\ B_6 &= 3407.9 + 1257 - 0.7 + 39.7 - 3.5 = 4700.4 & (4700.1) \\ B_7 &= 3407.9 + 1885.6 + 2.5 - 79.5 + 1.5 = 5217.9 & (5217.5) \end{aligned}$$

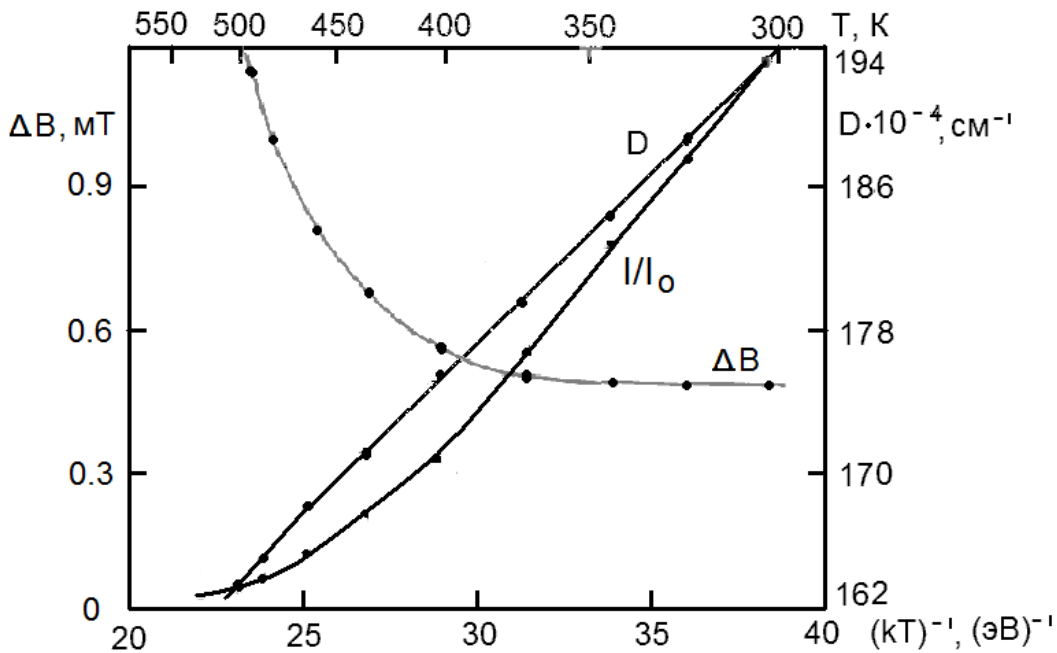


Рис. 4. Температурная зависимость константы D , ширины линии ΔB и относительной интенсивности I/I_0 «тонких» линий ЭПР-спектра
Заключение

Методом ЭПР в X-диапазоне экспериментально исследован монокристалл RbCl-Eu^{2+} и произведен теоретический расчет положений «тонких» линий спектра, из которого найдены константы спин-гамильтониана. Получены температурные зависимости некоторых параметров спектра.

В предположении линейности расщепления энергетических уровней в магнитном поле из спектра для $B // [001]$ дана оценка начальных расщеплений $^8\text{S}_{7/2}$ -состояния в отсутствие магнитного поля. Линейная экстраполяция поведения энергетических уровней в область нулево-

го магнитного поля дает расщепления четырех гипотетических крамеровских дублетов иона Eu^{2+} в RbCl : $0,1692 \text{ см}^{-1}$, $0,1211 \text{ см}^{-1}$ и $0,0636 \text{ см}^{-1}$. Линейность расщепления была экспериментально установлена измерениями на трех различных частотах $7994,5 \text{ МГц}$, $8764,2 \text{ МГц}$ и $9523,0 \text{ МГц}$, что подтверждает правомерность применения метода возмущений. Термообработка образца непосредственно в резонаторе позволяет наблюдать распад комплексов Eu^{2+} -вакансия, контролируя интенсивность «тонких» групп ЭПР спектра. Результаты измерений приведены на рис.4. При температуре 550 К интенсивность «тонких» линий становится сравнимой с шумами спектрометра, что говорит о резком ослаблении связи Eu^{2+} иона с компенсирующей вакансией. В области температур $400\text{-}550^\circ\text{К}$ происходит падение относительной интенсивности I/I_0 «орторомбического» спектра и уширение ЭПР линий, обусловленное уменьшением времени жизни вакансии в каждом из 12 возможных положений вблизи иона Eu^{2+} с соответствующим укорочением времени релаксации. Сдвиг тонких линий к переходу $1/2 \rightarrow -1/2$ с повышением температуры происходит за счет уменьшения константы D , которое по приблизительной оценке составляет $-(1-2) \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-1}/\text{К}$. Естественно предположить, что оно обусловлено увеличением времени жизни компенсирующей вакансии в более дальних координационных сферах и, следовательно, увеличением среднего расстояния между ионом Eu^{2+} и вакансией. Исчезновение «орторомбического» спектра сопровождается появлением «кубического», который возникает от ионов Eu^{2+} , покинутых компенсирующей вакансией. Модель «кубического» центра подробно рассмотрена в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Моргунов, Р.Б. Корреляция между возникновением магнитоупругого эффекта и изменениями спектров электронного парамагнитного резонанса после закалывания монокристаллов $\text{NaCl} : \text{Eu}$ [Текст] / Р.Б. Моргунов, А.А. Баскаков // Физика твердого тела. – 2003. – Т. 45. – Вып. 1. – С. 91.
2. Ермакович, К.К. Модельная задача по атомной физике [Текст] / К.К. Ермакович // Информационные технологии в процессе подготовки современного специалиста: Межвузовский сборник. – Липецк: ЛГПУ, 2008. – Вып. 11. – С. 55-60.
3. Сорин, Л.А. Введение в радиоспектроскопию парамагнитных монокристаллов [Текст] / Л.А. Сорин, М.В. Власова, В.Д. Левандовский – Киев: Наукова думка, 1969. – 255 с.
4. Aguilar, S. Studies by electron paramagnetic resonance of K- and Na- bromides doped with Eu^{2+} [Text] / S. Aguilar, H. Murrieta, J. Rubio, E. Munoz // The Journal of Chemical Physics. – 1975. – V. 62. – № 4. – p.1197-1200.
5. Абрагам, А. Электронный парамагнитный резонанс переходных ионов [Текст] / А. Абрагам, Б. Блини. – М.: Мир, 1973. – 1000 с.
6. Ермакович, К.К. Модельная задача по атомной физике [Текст] / К.К. Ермакович, И.С. Бровашов, И.В. Чепелева // Информационные технологии в процессе подготовки современного специалиста: Межвузовский сборник. – Липецк: ЛГПУ, 2009. – Вып. 12. – Т.1. – С. 103-113.

УДК 537.311.322

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛИ СОПРОТИВЛЕНИЯ РАСТЕКАНИЯ КОНТАКТОВ К АНИЗОТРОПНЫМ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМ ПЛАСТИНАМ И ПЛЕНКАМ

А.А. Заворотный, Н.Н. Поляков

Аннотация

На основе решения соответствующей краевой задачи электродинамики выполнен расчет распределений потенциала и плотности тока в анизотропных полупроводниковых пластинах и пленках. Обнаружено наличие поперечного напряжения анизотропии и увеличение поверхностной плотности тока, вызванные анизотропией электропроводности материала образцов. Результаты работы использованы для вычисления сопротивления растекания контактов металл-полупроводник. Выполнен анализ зависимостей сопротивления растекания от размеров контактных площадок и компонент тензора электропроводности.

В современной электронной технике все большее значение приобретают тонкопленочные полупроводниковые структуры, которые в определенных условиях обладают анизотропией электрических свойств. В связи с этим учет влияния анизотропии материалов на контактные явления в полупроводниках является актуальным. Проблема надежности контактов металл-полупроводник связана с увеличением быстродействия, уменьшением потребляемой мощности и повышением надежности микросхем. Омические контакты необходимы при проведении контрольных и сравнительных измерений концентрации, подвижности и фактора рассеяния носителей заряда в полупроводниковых кристаллах и пленках, а также измерений удельной электропроводности методом сопротивления растекания [1]. Необходимо развитие методов определения параметров однородного и неоднородного контактов, качества и надежности их работы, оценки времени работы контактов до отказа для установленных физико-химических процессов в контактах, обуславливающих их деградацию. Во всех подобных случаях необходима разработка новых и усовершенствование существующих методов измерений характеристик контактов, что требует построения соответствующих математических и компьютерных моделей.

В настоящей работе построены математическая и компьютерная модели омических контактов малой площади металл-анизотропный полупроводник применительно к полупроводниковым пластинам и пленкам. Выполнен анализ зависимостей сопротивления растекания контактов от размеров контактных площадок и анизотропии исследуемых образцов.

Математическая модель сопротивления растекания контактов

Рассмотрим простейшую модель двух контактов к анизотропной прямоугольной пластине или пленке, изображенной на рис. 1.

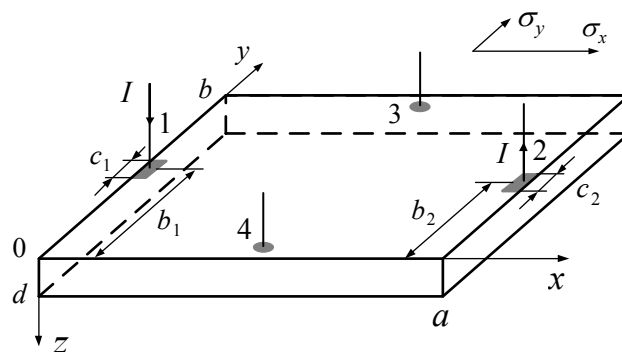


Рис. 1. Расположение контактов на образце

При пропускании через контакты 1 и 2 постоянного тока I потенциал $\varphi(x, y)$ в образце будет удовлетворять краевой задаче [2]

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{cases} -\frac{I}{\sigma_x \cdot c_1 \cdot d}, & \text{при } \left(b_1 - \frac{c_1}{2}\right) \leq y \leq \left(b_1 + \frac{c_1}{2}\right), \\ 0, & \text{вне этой области;} \end{cases} \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=a} = \begin{cases} -\frac{I}{\sigma_x \cdot c_2 \cdot d}, & \text{при } \left(b_2 - \frac{c_2}{2}\right) \leq y \leq \left(b_2 + \frac{c_2}{2}\right) \\ 0, & \text{вне этой области;} \end{cases} \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0, b} = 0. \quad (4)$$

Здесь σ_x, σ_y – главные компоненты тензора электропроводимости материала образца

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (1) представим в виде ряда Фурье [3]

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} X_k(x) \cdot \cos(\alpha_k y), \quad \alpha_k = \frac{\pi \cdot k}{b}, \quad k \in Z, \quad (6)$$

Подставим выражение (6) в уравнение (1) и в граничные условия (2) – (4), освобождаясь от ряда путем интегрирования с использованием ортогональности тригонометрических функций. В результате получаем уравнением и граничные условия для функции $X_k(x)$, которая имеет вид

$$\frac{d^2 X_k(x)}{dx^2} + \beta_k^2 \cdot X_k(x) = 0, \quad (7)$$

$$\left. \frac{dX_k(x)}{dx} \right|_{x=0} = \begin{cases} -\frac{I}{\sigma_x \cdot c_1 \cdot d \cdot b}, \\ 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$\left. \frac{dX_k(x)}{dx} \right|_{x=a} = \begin{cases} -\frac{I}{\sigma_x \cdot c_2 \cdot d \cdot b}, \\ 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решением уравнения (7) будет выражение

$$X_k(x) = A_k \cdot \text{sh}(\beta_k x) + B_k \cdot \text{ch}(\beta_k x), \quad (10)$$

$$\beta_k = \alpha_k \cdot \gamma; \quad \gamma = \sqrt{\sigma_y / \sigma_x}. \quad (11)$$

Опуская довольно громоздкую процедуру определения коэффициентов A_k , B_k , запишем окончательный результат для распределения потенциала

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \frac{I}{\sigma_x db} \left(\frac{a}{2} - x \right) + \frac{2I}{\sigma_x db} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin(\alpha_k \cdot c_1/2) \cdot \cos(\alpha_k \cdot b_1)}{\alpha_k \cdot c_1/2} \cdot \frac{\text{ch}(\beta_k \cdot (a-x))}{\beta_k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin(\alpha_k \cdot c_2/2) \cdot \cos(\alpha_k \cdot b_2)}{\alpha_k \cdot c_2/2} \cdot \frac{\text{ch}(\beta_k \cdot x)}{\beta_k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} \right] \cdot \cos(\alpha_k y). \end{aligned} \quad (12)$$

Полученное выражение для потенциала позволяет создать модели сопротивления растекания при помощи ЭВМ.

Найдем падение напряжения U_{12} в образце между контактными площадками

$$U_{12} = \langle \varphi_1 \rangle - \langle \varphi_2 \rangle, \quad (13)$$

где

$$\langle \varphi_1 \rangle = \frac{1}{c_1} \int_{b_1 - c_1/2}^{b_1 + c_1/2} \varphi(x=0, y) dy, \quad \langle \varphi_2 \rangle = \frac{1}{c_2} \int_{b_2 - c_2/2}^{b_2 + c_2/2} \varphi(x=a, y) dy. \quad (14)$$

В результате получаем выражения для потенциала первого и второго контактов соответственно:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 \rangle = & \frac{I}{\sigma_x db} \cdot \frac{a}{2} + \frac{2I}{\sigma_x db} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{\text{ch}(\beta_k a)}{\beta_k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} \cdot \frac{\sin^2(\alpha_k \cdot c_1/b) \cdot \cos^2(\alpha_k \cdot b_1)}{\alpha_k^2 \cdot (c_1/2)^2} \right] - \\ & - \frac{2I}{\sigma_x db} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{\beta_k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} \cdot \frac{\sin(\alpha_k \cdot c_1/2) \cdot \sin(\alpha_k \cdot c_2/2) \cdot \cos(\alpha_k b_1) \cdot \cos(\alpha_k b_2)}{\alpha_k^2 \cdot (c_1 \cdot c_2/4)} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_2 \rangle = & - \frac{I}{\sigma_x db} \cdot \frac{a}{2} - \frac{2I}{\sigma_x db} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{\text{ch}(\beta_k a)}{\beta_k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} \cdot \frac{\sin^2(\alpha_k \cdot c_2/b) \cdot \cos^2(\alpha_k \cdot b_2)}{\alpha_k^2 \cdot (c_2/2)^2} \right] + \\ & + \frac{2I}{\sigma_x db} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{\beta_k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} \cdot \frac{\sin(\alpha_k \cdot c_1/2) \cdot \sin(\alpha_k \cdot c_2/2) \cdot \cos(\alpha_k b_1) \cdot \cos(\alpha_k b_2)}{\alpha_k^2 \cdot (c_1 \cdot c_2/4)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя соотношение (13), находим сопротивление образца постоянному току

$$R = U_{12}/I = R_0 + R_s, \quad (17)$$

где R_0 – объемное сопротивление образца:

$$R_0 = \frac{a}{\sigma_x db}. \quad (18)$$

Величина R_s в выражении (17) представляет собой сопротивление растекания контактов, которое представимо в виде

$$R_s = R_{s1} + R_{s2} + R_{s12}, \quad (19)$$

где R_{s1} – сопротивление растекания первого контакта:

$$R_{s1} = \frac{a}{\sigma_x db} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot \text{ch}(\beta_k a)}{\beta_k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} \cdot \frac{\sin^2(\alpha_k \cdot c_1/2) \cdot \cos^2(\alpha_k \cdot b_1)}{\alpha_k^2 \cdot (c_1/2)^2}; \quad (20)$$

R_{s2} – сопротивление растекания второго контакта:

$$R_{s2} = \frac{a}{\sigma_x db} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot \text{ch}(\beta_k a)}{\beta_k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} \cdot \frac{\sin^2(\alpha_k \cdot c_2/2) \cdot \cos^2(\alpha_k \cdot b_2)}{\alpha_k^2 \cdot (c_2/2)^2}; \quad (21)$$

R_{s12} – взаимное влияние контактов на величину сопротивления растекания:

$$R_{s12} = \frac{a}{\sigma_x db} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\beta_k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} \cdot \frac{\sin(\alpha_k \cdot c_1/2) \cdot \sin(\alpha_k \cdot c_2/2) \cdot \cos(\alpha_k \cdot b_1) \cdot \cos(\alpha_k \cdot b_2)}{\alpha_k^2 \cdot (c_1 \cdot c_2/4)}. \quad (22)$$

Для понимания физической сущности влияния анизотропии на сопротивления растекания дополнительно понадобится построение модели векторного поля плотности тока в образце.

Используя (12), определим компоненты вектора плотности тока \vec{j} :

$$j_x = \sigma_x \cdot E_x = -\sigma_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad j_y = \sigma_y \cdot E_y = -\sigma_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (23)$$

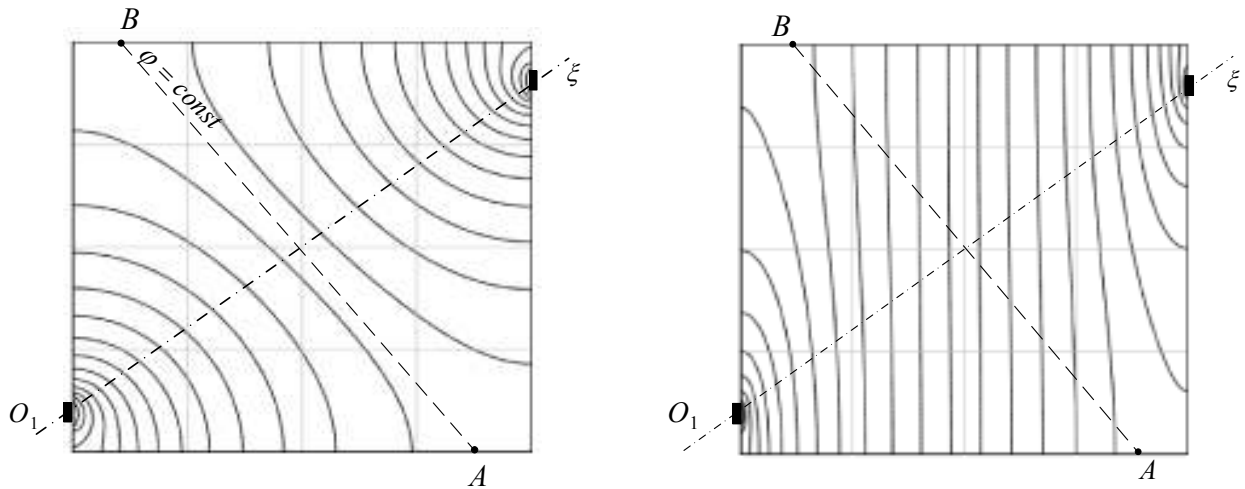
Подставив в (23) результаты необходимых вычислений, получим

$$j_x = \frac{I}{db} + \frac{2I}{db} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{\text{sh}(\beta_k (a-x))}{\text{sh}(\beta_k a)} \cdot \frac{\sin(\alpha_k \cdot c_1/2) \cdot \cos(\alpha_k \cdot b_1)}{\alpha_k \cdot c_1/2} + \frac{\text{sh}(\beta_k x)}{\text{sh}(\beta_k a)} \cdot \frac{\sin(\alpha_k \cdot c_2/2) \cdot \cos(\alpha_k \cdot b_2)}{\alpha_k \cdot c_2/2} \right] \cdot \cos(\alpha_k y), \quad (24)$$

$$j_y = \frac{2I}{db} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{\operatorname{ch}(\beta_k(a-x))}{\beta_k \cdot \operatorname{sh}(\beta_k a)} \cdot \frac{\sin(\alpha_k \cdot c_1/2) \cdot \cos(\alpha_k \cdot b_1)}{c_1/2} + \frac{\operatorname{ch}(\beta_k x)}{\beta_k \cdot \operatorname{sh}(\beta_k a)} \cdot \frac{\sin(\alpha_k \cdot c_2/2) \cdot \cos(\alpha_k \cdot b_2)}{c_2/2} \right] \cdot \sin(\alpha_k y) \quad (25)$$

Компьютерное моделирование и анализ формул для сопротивления растекания контактов

Полученные формулы (12), (24) и (25) используем для построения моделей линий уровня потенциала и плотности тока в системе MathCAD. Результат этих операций представлен на рис. 2, 3. На данных рисунках показаны для сравнения эквипотенциалы и линии тока для изотропного и анизотропного образцов.



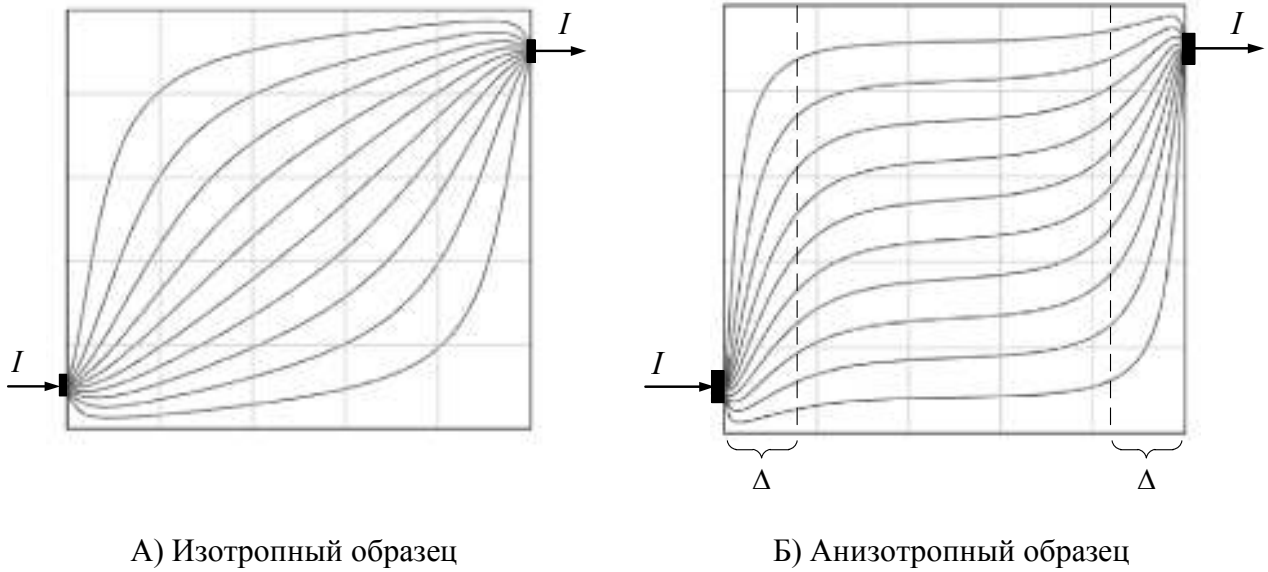
А) Эквипотенциалы изотропного образца при $\sigma = 11130 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$
 $(\sigma = \sqrt{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \text{ где } \sigma_x = 3520 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1} \text{ и } \sigma_y = 35200 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1})$

Б) Эквипотенциалы анизотропного образца при $\sigma_x = 3520 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ и $\sigma_y = 35200 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$

Рис. 2. Эквипотенциалы в полупроводниковом образце при $a = b = 0.01 \text{ м}$

Из сравнения рис. 2 А и Б можно сделать вывод, что в изотропном образце разность потенциалов между симметрично расположенными точками (в частности, для примера взяты точки А и В) относительно линии контактов $O_1\xi$ равна нулю. В анизотропном образце наблюдается квазихолловское поперечное электрическое поле, причем разность потенциалов между точками А и В сравнима с разностью потенциалов между контактами образца. Данное напряжение называется поперечным напряжением анизотропии (ПНА) [4].

Анализируя рис. 3, делаем вывод о том, что в изотропном образце наблюдается симметрия в расположении линий тока, тогда как в анизотропном образце симметрия отсутствует и возникает поверхностный эффект в расположении линий тока, т.е. сгущение (вынос) линий тока вблизи поверхности в области Δ – аналог скин-эффекта при переменном токе. Этот факт имеет решающее значение при вычислении сопротивления растекания контактов малой площади к анизотропным пленкам.

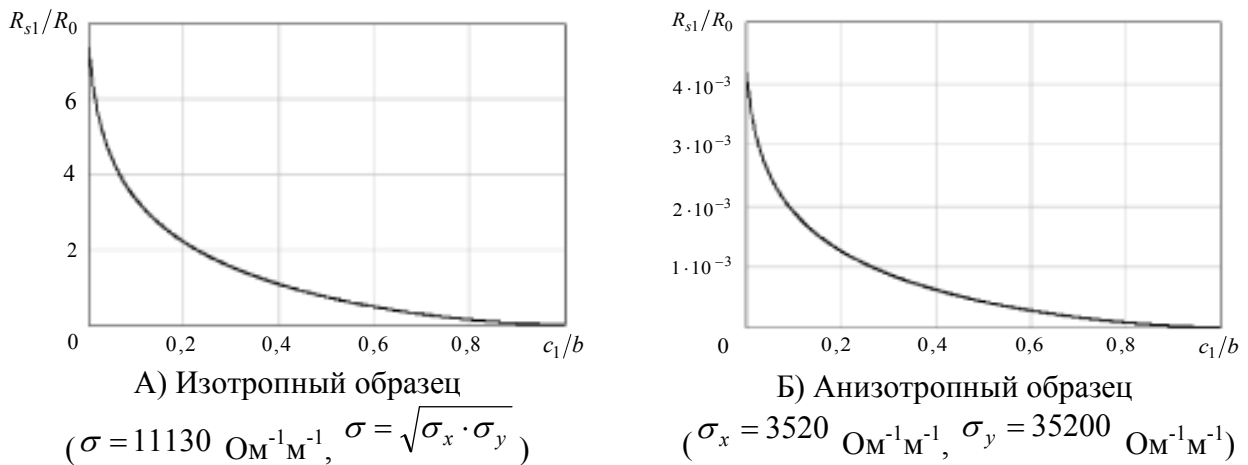


А) Изотропный образец

Б) Анизотропный образец

Рис. 3. Линии тока в полупроводниковом образце при $a = b = 0.01 \text{ м}$

Данные рисунки позволяют проанализировать зависимости сопротивления растекания токового омического контакта от его относительной ширины c_i/b ($i=1,2$). На рисунке 4 приведены для сравнения соответствующие зависимости для изотропного и анизотропного образцов.



А) Изотропный образец

Б) Анизотропный образец

$(\sigma = 11130 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}, \sigma = \sqrt{\sigma_x \cdot \sigma_y})$

$(\sigma_x = 3520 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}, \sigma_y = 35200 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1})$

Рис. 4. Зависимости сопротивления растекания токового контакта от его относительной ширины c_i/b для квадратного образца

Анализируя рис. 4, приходим к выводу, что сопротивление растекания контактов к анизотропному образцу уменьшается на порядок (а то и выше) по сравнению с изотропным образцом. Также можно видеть, что в изотропном образце сопротивление растекания играет главную роль в области контакта, превосходя по значению объемное сопротивление R_0 больше, чем в 5 раз. Другая картина наблюдается в анизотропном образце: здесь объемное сопротивление R_0 намного превосходит сопротивление растекания R_{s1} даже в приграничной с кон-

тактом зоне, что говорит о том, что сопротивление растекания контактов в анизотропном образце в некоторых случаях можно не учитывать.

Анализируя взаимовлияние контактов на сопротивление растекания в изотропном и анизотропном образцах (рис. 5), приходим к выводу, что в анизотропном образце взаимовлияние контактов R_{s12} уменьшается на несколько порядков, что позволяет полностью исключить его при расчете сопротивления растекания контактов.

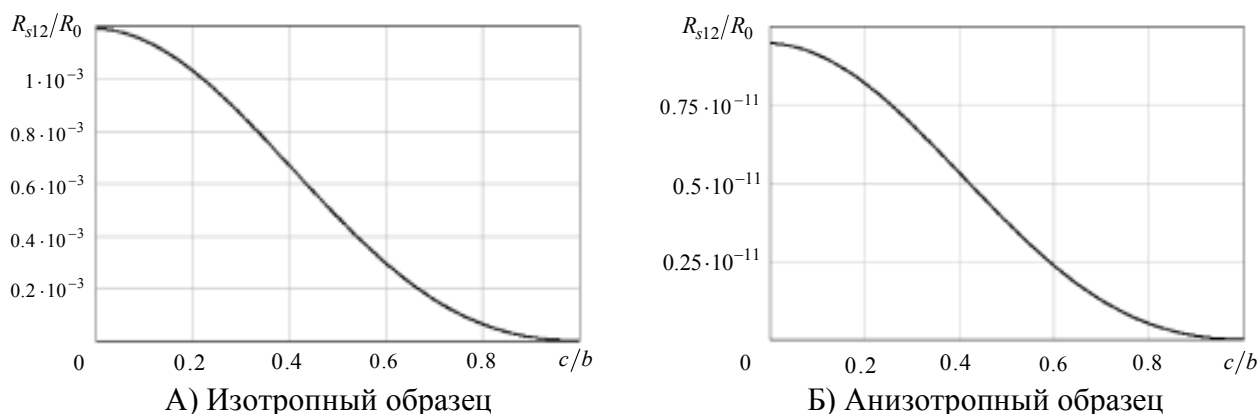


Рис. 5. Зависимости взаимовлияния контактов на сопротивление растекания от ширины контактов для квадратного образца ($c_1/b = c_2/b = c/b$)

Таким образом, выполненные на ЭВМ расчеты позволяют сделать следующие выводы:

1. Сопротивление полупроводникового анизотропного образца R можно представить в виде суммы объемного сопротивления R_0 и сопротивлений растекания контактов R_{s1} и R_{s2} , которые определяются выражениями (20) и (21). Величиной R_{s12} , определяемой выражением (22), в случае анизотропного образца можно полностью пренебречь, т.к. его величина значительно меньше, чем величины R_0 , R_{s1} и R_{s2} для тех же параметров образца.

2. Сопротивление растекания контакта малой площади определяется в случае анизотропного образца подконтактной областью полупроводника, где сгущаются линии тока. Причем в ряде случаев, из-за малой величины сопротивления растекания ($\sim 10^{-3}$), им можно пренебречь.

3. Ряды в правой части выражений (20) – (22) хорошо сходятся [5], что позволяет при расчетах в системе MathCAD ограничиться одной тысячей членами ряда (верхний предел суммирования).

Полученные результаты имеют практическое применение при конструировании и изготовлении различных датчиков на основе анизотропных материалов. Поперечное напряжение анизотропии необходимо учитывать при измерениях э.д.с. Холла и компонент тензора электропроводности полупроводников [6]. Учет распределений потенциала и тока полезны при решении проблем контактов в электронике – надежности, долговечности, тепловых потерь и других [7].

Благодарности. Работа поддержана Минобрнауки, проект 2.3833.2011.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов, Л.П. Методы измерения параметров полупроводниковых материалов [Текст] / Л.П. Павлов. – М.: Высшая школа, 1987. – 239 с.
2. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред [Текст] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 656 с.
3. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении [Текст] / Р. Эдвардс. – М.: Мир, 1985. Т. 1. – 264 с.
4. Поляков, Н.Н. Об эффекте Холла в анизотропных пленках и монокристаллах [Текст] / Н.Н. Поляков // ЖТФ. – 1993. – Т. 63. – №3. – С. 51 – 58.
5. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
6. Вайсс, Г. Физика гальваномагнитных полупроводниковых приборов и их применение [Текст] / Г. Вайсс. – М.: Энергия. – 1974. – 384 с.
7. Стриха, В.И. Физические основы надежности контактов металл-полупроводник в интегральной электронике [Текст] / В.И. Стриха, Е.В. Бузанева. – М.: Радио и связь, 1987. – 256 с.

УДК 537.311.322

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ СВОЙСТВ НАПОЛНЕННЫХ МЕТАЛЛАМИ КРЕМНИЕВЫХ НАНОТРУБОК

В.В. Филиппов, А.А. Заворотний

Аннотация

В работе на основе квантовомеханических представлений рассмотрена атомная и электронная структуры однослойных кремниевых хиральных нанотрубок. Представлены выражения для плотности электронных состояний и проводимости, заполненных металлами кремниевых и углеродных нанотрубок.

Открытие углеродных нанотрубок (УНТ) привело к появлению направлений исследований, направленных на синтез и изучение других химических элементов нанотубулярной формы [1-4]. Интерес к наноструктурированным материалам в форме нанотрубок обусловлен возможностью регулирования электронных, механических, магнитных и др. свойств при незначительном изменении структуры или допированием примесями [5-9]. Так, например, УНТ, заполненные атомами металлов, обладают проводниковыми свойствами и обладают большей устойчивостью по отношению к «чистым» УНТ. При исследовании неуглеродных НТ возникают следующие основные направления исследований: экспериментальные методы синтеза НТ, теоретическое обоснование существования таких структур, теоретический анализ и прогнозирование свойств НТ, а также экспериментальное исследование получаемых структур и их возможные практические применения. При интегрировании углеродных наноструктур в кремниевую наноэлектронную приборную базу возникает проблема устойчивости контактов, решение в данном случае может быть найдено путем применения наноструктурированных материалов на основе кремния, в частности, кремниевых нанотрубок (КНТ).

В данной статье построена теоретическая модель, описывающая основные электронные свойства кремниевых нанотрубок. Представлены выражения для электронного спектра, плотности электронных состояний и проводимости, заполненных металлами нанотрубок.

В ряде теоретических работ отмечается, что атомная структура КНТ может быть построена аналогично УНТ (рис. 1) [2, 3], однако для кремния наиболее стабильным типом связи является sp^3 , в отличие от углерода, для которого более энергетически выгодной является sp^2 -связь. В связи с указанным, построение атомной структуры одностенных КНТ можно рассматривать на основе сворачивания фрагментов квадратной решетки (рис. 2). Устойчивость кремниевых нанотрубок со структурой, подобной приведенной на рис. 2, подтверждается теоретическими расчетами [2], а также известной стабильностью квадратного кремниевого кластера Si_4 [10].

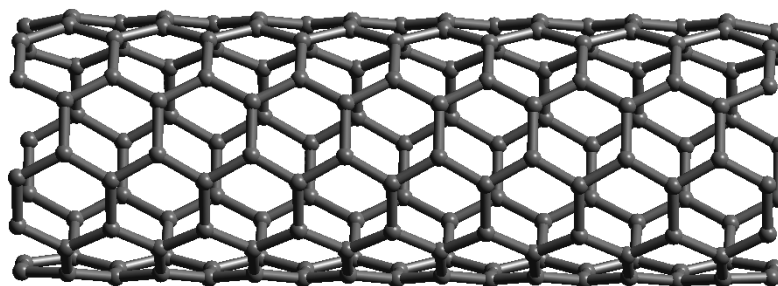


Рис. 1. Атомная структура фрагмента однослойной НТ $C_{170}(5,5)$ с sp^2 связями

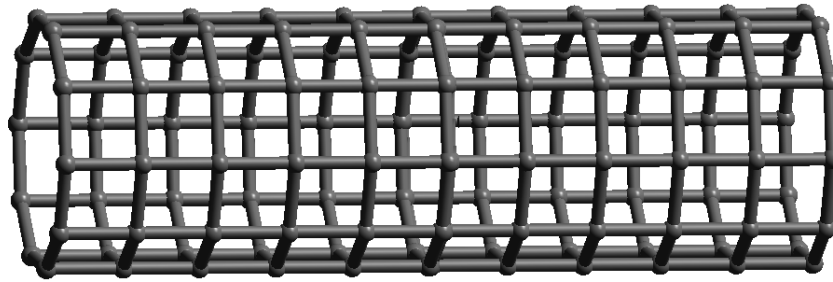


Рис. 2. Атомная структура фрагмента однослойной КНТ $Si_{110}(10,0)$ с sp^3 связями

Нанотрубки могут заполняться примесными атомами либо в процессе изготовления, либо путем вскрытия торцов пустых трубок и наполнения их, например, за счет капиллярного эффекта [11-13]. Известно, что при заполнении УНТ атомами металлов свободные электроны из металлической части частично переходят на поверхность НТ [14, 15]. Таким образом, поверхность нанотрубки заряжается отрицательно, а ее внутренность — положительно. Известно, что большинство металлов проявляют донорные свойства в кристаллическом кремнии [10, 16]. Соответственно, будем полагать при дальнейших расчетах, что отрицательный заряд распределен по поверхности нанотрубки равномерно [8]. При расчетах не будем останавливаться на атомной структуре нанотрубки и ее внутреннего строения.

Рассмотрим фрагмент одиночной НТ, радиус R которой много меньше её длины L . Полагаем, что положительный заряд внутри нанотрубки распределен равномерно по объему, отрицательный — по поверхности НТ. Будем считать, что N_0 поверхностных атомов кремния захватывают один электрон. Согласно описанной модели потенциальная энергия электронов внутри нанотрубки квадратично зависит от расстояния $r < R$ до центра нанотрубки [17]:

$$U(r) = \begin{cases} -e \cdot \frac{K_i}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (1)$$

где e — заряд электрона, K_i — абсолютное значение поверхностной плотности заряда НТ. Здесь $i=1$ для НТ, построенной из шестиугольных граней кремния (рис. 1), $i=2$ для НТ, построенной из квадратных ячеек (рис. 2). Величина K_i подсчитывается как число атомов кремния на единицу длины, деленной на число атомов N_0 , принявших один электрон и умноженной на заряд электрона e .

В случае нанотрубки $(n,0)$ с sp^2 связями получаем:

$$K_{1,1} = e \frac{\chi_{1,1}}{3a_0 N_0}, \quad \chi_{1,1} = \frac{8 R n \sin(\pi/n)}{a_0 \sqrt{3}} \approx \frac{8\pi R}{a_0 \sqrt{3}}, \quad (2)$$

где a_0 — расстояние между ближайшими атомами вершин n -угольника, образующего поперечное сечение нанотрубки. Указанное значение K_1 определено для аксиально-симметричной ячейки нанотрубки с периодом трансляции $3a_0$. Известно, что радиус нанотрубки, образованной в результате сворачивания графитового слоя, определяется как [18, 19]:

$$R = \frac{\sqrt{3}a_0}{2\pi} \sqrt{m^2 + n^2 + mn} \quad (3)$$

Следовательно, для хиральной нанотрубки (n,n) получаем

$$K_{1,2} = e \frac{\chi_{1,2}}{2a_0 N_0}, \quad \chi_{1,2} = 4n = \frac{8\pi R}{3a_0}. \quad (4)$$

Соответственно, для КНТ $(n,0)$ с sp^3 связями (рис. 2) имеем:

$$K_{2,1} = \frac{\chi_{2,1}}{N_0} \frac{e}{a_0}, \quad \chi_{2,1} = n = \frac{2\pi R}{a_0}; \quad (5)$$

для зигзагообразной НТ (n,n) с квадратными ячейками:

$$K_{2,2} = \frac{\chi_{2,2}}{N_0} \frac{e}{a_0 \sqrt{2}}, \quad \chi_{2,2} = 2n = \frac{2\sqrt{2}\pi R}{a_0}. \quad (6)$$

Отмечаем, что для КНТ $(n,0)$ и (n,n) с квадратными ячейками $K_{2,1} = K_{2,2} = K_2$.

Видно, что глубина потенциальной ямы прямо пропорциональна радиусу нанотрубки. Необходимо также указать, что выбранное приближение (1) отражает среднее распределение электронной плотности, поэтому процедура согласования с учетом атомного строения при таком выборе потенциала теоретически не обоснована.

Определим энергетический спектр электрона в потенциальной яме в цилиндрической системе координат с помощью уравнения Шредингера. В приближении эффективной массы уравнение, описывающее состояния электрона имеет вид:

$$\mathbf{H}\Psi = E\Psi, \quad \mathbf{H} = \left[-\frac{\hbar}{2m_{\perp}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) - \frac{\hbar}{2m_{\parallel}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U(r) \right], \quad (7)$$

где (r, Θ, z) – координаты движения электрона, $(m_{\perp}, m_{\parallel})$ – поперечная и продольная эффективные массы электрона, $U(r)$ – потенциальная энергия, определяемая согласно (1).

Поскольку операторы квазиимпульса и момента импульса на ось z коммутируют с гамильтонианом (7) и между собой, считая m_{\perp} и m_{\parallel} постоянными, представим функцию состояния электрона в виде произведения независимых собственных функций, определяющих волновые функции продольного и поперечного движения:

$$\Psi(r, \Theta, z) = \psi_r \cdot \psi_{\Theta} \cdot \psi_z = A \exp \left(i \left(\frac{p_z}{\hbar} \sqrt{\frac{m_{\perp}}{m_{\parallel}}} z + m_z \Theta \right) \right) \cdot \psi_{n, m_z}(r), \quad (8)$$

где A – постоянная нормировки, p_z – значение оператора импульса на ось z , $n=1,2,3\dots$ – главное квантовое число, $m_z = 0, 1, 2, \dots, n-1$ – азимутальное квантовое число.

Волновой функции (8) соответствуют энергия электрона:

$$E(n, m_z, p_z) = E_0(n, m_z) + \frac{p_z^2}{2m_{\parallel}}, \quad (9)$$

где $E_0(n, m_z)$ определяет энергетический спектр поперечного движения электрона в НТ и находится как собственное значение оператора:

$$\mathbf{H}_r = \frac{\hbar}{2m_{\perp}} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{m_z^2}{r^2} \right) + U(r) \quad (10)$$

Для произвольного азимутального числа m_z точное решение задачи о нахождении оператора (10) в известной литературе отсутствует. Однако возможно определение спектра энергии задачи для основного состояния ($n=1, m_z=0$).

В декартовой системе координат уравнение Шредингера, определяющее спектр поперечного движения основного состояния, с учетом (5) примет вид:

$$\left[-\frac{\hbar}{2m_{\perp}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - eK_i \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) \right] \Psi_{f_1}(x) \Psi_{f_2}(y) = E_{f_1+f_2} \Psi_{f_1}(x) \Psi_{f_2}(y) \quad (11)$$

Следовательно, спектр электронов у дна локализирующего потенциала имеет вид двумерного гармонического осциллятора [20]:

$$E_f = (f+1)\hbar\omega - e \cdot K_i, \quad (12)$$

где $f = f_1 + f_2$ – номер осцилляторного уровня, $f_1, f_2 = 0, 1, 2, \dots$, $\omega = \sqrt{2eK_i / (4\pi\epsilon_0 R^2 m_{\perp})}$ – частота нулевых колебаний электрона. Соответственно, полная энергия электрона с квазиимпульсом p_z определяется выражением:

$$E = E_f + \frac{p_z^2}{2m_{\parallel}} = \frac{(f+1)\hbar}{R} \sqrt{\frac{eK_i}{2\pi\epsilon_0 m_{\perp}}} - \frac{e \cdot K_i}{4\pi\epsilon_0} + \frac{p_z^2}{2m_{\parallel}} \quad (13)$$

Отметим, что расстояние между уровнями пропорционально величине $R^{-1/2}$, а, соответственно, число уровней пропорционально $R^{3/2}$.

Определим размещение по подзонам и плотность квазиодномерных состояний в НТ в рамках одноэлектронного приближения. В случае продольного движения электронов внутри нанотрубки, согласно [16], определяем квазиимпульс Ферми:

$$p_F = \frac{\pi^2 \hbar \rho R^2}{2}, \quad (14)$$

где ρ – плотность (концентрация) электронов проводимости. Следовательно, условие заполнения электронами только одной подзоны имеет вид:

$$E_F < \hbar\omega \Rightarrow \frac{\pi^2 \hbar^2 \rho^2 R^4}{8m_{\parallel}} < \hbar\omega \quad (15)$$

Ввиду одномерного характера движения электронов вдоль нанотрубки значения квазиимпульсов в первой подзоне принимают значения $-p_F \leq p_z \leq p_F$, соответственно, поверхность Ферми вырождается на две изолированные точки $E_F(-p_F)$ и $E_F(p_F)$, а уровень энергии уровня Ферми, находящегося посередине между первым и вторым уровнями поперечного движения, определяется как

$$E_F = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (16)$$

С ростом концентрации электронов проводимости или радиуса НТ электроны начинают размещаться и во второй подзоне, соответственно, число состояний увеличивается на величину $2(p_F - \sqrt{2m_{\parallel}\hbar\omega})L/(\pi\hbar)$, где L – длина НТ. Тогда с учетом двукратного вырождения второго осцилляционного уровня условие для определения квазиимпульса Ферми принимает вид:

$$\pi^2\hbar\rho R^2/2 = p_F + 2(p_F - \sqrt{2m_{\parallel}\hbar\omega}). \quad (17)$$

Откуда получаем квазиимпульс Ферми в первой подзоне с учетом размещения электронов в двух подзонах:

$$p_F = \frac{\pi^2\hbar\rho R^2}{6} + \frac{2}{3}\sqrt{2m_{\parallel}\hbar\omega}. \quad (18)$$

В случае произвольного числа подзона $N(R)$ несложно показать, что взаимосвязь квазиимпульса в первой подзоне и $N(R)$ определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{p_F^2}{2m_{\parallel}} = N\hbar\omega; \\ p_F = \frac{\pi^2 R^2 \hbar \rho}{N(N+1)} + \frac{2\sqrt{2m_{\parallel}\hbar\omega}}{N(N+1)} \sum_{s=1}^{N-1} \{(s+1)\sqrt{s}\}. \end{cases} \quad (19)$$

Согласно [21] для одной подзоны с квантовым числом f в интервале энергии dE плотность состояний определяется следующим образом:

$$g_f(E)dE = \frac{4L(f+1)}{2\pi\hbar} dp_z. \quad (20)$$

С учетом (13) получаем плотность одноэлектронных состояний в наполненной металлом НТ:

$$g_f(E) = \frac{L\sqrt{2m_{\parallel}}}{\pi\hbar} \sum_{E_f < E} \left\{ \frac{f+1}{\sqrt{E-E_f}} \right\}, \quad (21)$$

где E_f определяется согласно (12), (13).

Определим электропроводимость наполненной металлом НТ. Согласно теории Ландауэра [22, 23] проводимость квантового канала задается выражением

$$G = G_0 T_i, \quad (22)$$

где $G_0 = 2e^2 / (2\pi\hbar)$ – квант проводимости, а T_i – коэффициент проницаемости канала для i -й моды поперечного квантования, суммирование ведется по всем модам, дающим вклад в проводимость. В рассматриваемом случае число мод с учетом кратности вырождения определяется как $N(N+1)/2$. Следовательно, считая коэффициенты проницаемости каналов близкими к единице, получаем:

$$G = \frac{2e^2}{2\pi\hbar} \frac{N(R) \cdot (N(R)+1)}{2}. \quad (23)$$

Таким образом, получены выражения, позволяющие определять положение уровня Ферми, плотность электронных состояний и число каналов проводимости. Представленные результаты дают возможность прогнозировать свойства УНТ и КНТ с учетом анизотропии эффективной массы в канале наноструктуры. Показано, что электронными свойствами однослойных нанотрубок, наполненных металлами, можно управлять, изменяя радиус НТ или выбирая различные материалы для их наполнения.

Благодарности. Работа поддержана Минобрнауки, проект 2.3833.2011.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивановский, А.Л. Неуглеродные нанотрубки: синтез и моделирование [Текст] / А.Л. Ивановский // Успехи химии. – 2002. – Т. 71. – № 3. – С. 203-224.
2. Мазуренко, Е.А. Синтез, свойства и моделирование кремниевых и германиевых нанотрубок [Текст] / Е.А. Мазуренко, М.Н. Дорошенко, А.И. Герасимчук // Украинский химический журнал. – 2008. – Т. 74. – № 11. – С. 3-15.
3. Герасименко, Н.Н. Кремний – материал наноэлектроники [Текст] / Н.Н. Герасименко, Ю.Н. Пархоменко. – М.: Техносфера, 2007. – 352 с.
4. Perepichka, D.E. Silicon Nanotubes [Text] / D.E. Perepichka, F. Rosei // Small. – 2006. – V. 2. – № 1. – P. 22-25
5. Елецкий, А.В. Углеродные нанотрубки [Текст] / А.В. Елецкий // Успехи физич. наук. – 1997. – Т. 167. – № 9. – С. 945-972.
6. Елецкий, А.В. Транспортные свойства углеродных нанотрубок [Текст] / А.В. Елецкий // Успехи физич. наук. – 2009. – Т. 179. – № 3. – С. 225-242.
7. Воробьева, А.И. Электродные системы к углеродным нанотрубкам и методы их изготовления [Текст] / А.И. Воробьева // Успехи физич. наук. – 2009. – Т. 179. – № 3. – С. 243-253.
8. Модель электронной структуры наполненной металлом углеродной нанотрубки [Текст] / Поклонский Н.А. [и др.] // Физика тв. тела. – 2000. – Т. 42. – № 10. – С. 1911-1916.
9. Чернозатонский, Л.А. Новый класс диоксидных нанотрубок MO_2 ($M = Si, Ge, Sn, Pb$) из "квадратных" решеток атомов – их структура и энергетические характеристики [Текст] / Л.А. Чернозатонский // Письма в Журнал экп. и теор. физики. – 2004. – Т. 80. – № 10. – С. 732-736.
10. Бацанов, С.С. Структурная химия. Факты и зависимости [Текст] / С.С. Бацанов. – М.: Диалог-МГУ, 2000. – 292 с.

11. Раков, Э.Г. Химия и применение углеродных нанотрубок [Текст] / Э.Г. Раков // Успехи химии. – 2001. – Т. 70. – №10. – С. 934-973.
12. Елецкий, А.В. Эндоэдральные структуры / А.В. Елецкий [Текст] // Успехи физич. наук. – 2000. – Т. 170. – № 2. – С. 113-142.
13. Cook, J. Opening and filling carbon nanotubes [Text] / J. Cook, J. Sloan, M.L.H. Green // Fullerene Sci. Technol. – 1997. – Т. 5. – № 4 – P. 695-704.
14. Lin, M.F. Magnetization of graphene tubules [Text] / M.F. Lin, K.W.-K. Shung // Phys. Rev. B. – 1995. – Т. 52. – № 11. – P. 8423-8438.
15. Ionic cohesion and electron doping of thin carbon tubules with alkali atoms [Text] / Y. Miyamoto [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1995. – V. 74. – № 15. – P. 2993-2996.
16. Киттель, Ч. Введение в физику твердого тела [Текст] / Ч. Киттель. – М.: Наука, 1978. – 792 с.
17. Батыгин, В.В. Сборник задач по электродинамике [Текст] / В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 640 с.
18. Дьячков, П.Н. Электронные свойства и применение нанотрубок [Текст] / П.Н. Дьячков. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 488 с.
19. Харрис, П. Углеродные нанотрубы и родственные структуры [Текст] / П. Харрис. – М.: Техносфера, 2003. – 336 с.
20. Галицкий, В.М. Задачи по квантовой механике [Текст] / В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.И. Коган. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – Ч. 1. – 304 с.
21. Yu, P.Y. Fundamentals of Semiconductors: Physics and Materials Properties [Text] / P.Y. Yu, M. Cardona. – Berlin: Springer. – 1996. – 617 p.
22. Landauer, R. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction [Text] / R. Landauer // IBM Journal of Research and Development. – 1957. – V. 1. – № 3. – P. 223-231.
23. Landauer, R. Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localized Scatterers in Metallic Conduction [Text] / R. Landauer // IBM Journal of Research and Development. – 1988. – V. 32. – № 3. – P. 306-316.