МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО»
(ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

ПО МАТЕМАТИКЕ

Липецк 2026

Цель вступительного испытания: определить уровень математической подготовки абитуриентов.

Задачи вступительного испытания: оценить уровень сформированности математических знаний абитуриента и умений применять их при решении математических задач.

Поступающий в должен:

знать: основные математические понятия, факты и методы, в соответствии с программой средней школы;

уметь: самостоятельно решать математические задачи, проводя необходимые вычисления и рассуждения; грамотно излагать полученные результаты;

владеть: навыками практического использования основных математических понятий, фактов и методов при решении различных задач.

Максимальный балл - 100 баллов.
Минимальный положительный балл - 40 баллов.

Содержание программы

Программа по математике для поступающих в ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского состоит из следующих разделов:

1) основные математические понятия и факты – полный перечень математических понятий и фактов, которыми должен владеть поступающий;
2) основные формулы и теоремы – основные утверждения и теоремы, используемые при решении задач вступительного экзамена по математике;
3) содержание разделов – наполняемость каждого из разделов;
4) литература – наименования пособий, которые могут быть использованы при подготовке к вступительному испытанию;
5) инструкция по выполнению работы;
6) примерный вариант письменной работы по математике;
7) система оценивания письменной экзаменационной работы по математике.

I. Основные математические понятия и факты

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа (N). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное.
2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
3. Целые числа (Z). Рациональные числа (Q), их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.
4. Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей.
5. Изображение чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.
6. Числовые выражения, выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.
7. Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.
8. Логарифмы и их свойства.
9. Одночлен и многочлен.
10. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена на примере квадратного трехчлена.
11. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции.
12. График функции. Возрастание и убывание функции, периодичность, четность, нечетность.

13. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.

14. Определения и основные свойства функций:

а) линейной $y = ax + b$,

б) квадратичной $y = ax^2 + bx + c$,

в) степенной $y = ax^n$ ($n \in N$), $y = \frac{k}{x}$,

г) показательной $y = a^x$ ($a > 0$),

д) логарифмической $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$),

е) тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$,

ж) арифметического корня $y = \sqrt{x}$.

15. Уравнение. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях.

16. Неравенства. Решения неравенства. Понятие о равносильных неравенствах.

17. Система уравнений и неравенств. Решения системы.

18. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n -го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формулы n -го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

19. Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).

20. Преобразование в произведение выражений $\sin a \pm \sin b$, $\cos a \pm \cos b$.

21. Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.

22. Производные функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = \log_a x$.

23. Производная суммы, произведения, частного двух функций, производная сложной функции.

24. Статистические характеристики.

25. Понятие вероятности. Простейшие комбинаторные комбинации.

Геометрия

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная. Длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.

2. Примеры преобразования фигур, виды симметрий. Преобразование подобия и его свойства.

3. Векторы. Операции над векторами.

4. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.

5. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

6. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.

8. Центральные и вписанные углы.

9. Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.

10. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.

11. Подобие. Подобные фигуры, отношение площадей подобных фигур.

12. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.

13. Параллельность прямой и плоскости.

14. Угол между прямой и плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.

15. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.

16. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы, пирамиды. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды, их виды.

17. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.
18. Формула объема параллелепипеда.
19. Формулы площади поверхности и объема призмы.
20. Формулы площади поверхности и объема пирамиды.
21. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.
22. Формулы площади поверхности и объема конуса.
23. Формула объема шара.
24. Формула площади сферы.

II. Основные формулы и теоремы

Алгебра и начала анализа

1. Свойства функции $y = ax + b$ и ее график.
2. Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ и ее график.
3. Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее график.
4. Формула корней квадратного уравнения.
5. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.
6. Свойства числовых неравенств.
7. Логарифм произведения, степени, частного.
8. Определение и свойства функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и их графики.
9. Определение и свойства функции $y = \mathrm{tg}\,x$ и ее график.
10. Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\,x = a$, $\mathrm{ctg}\,x = a$.
11. Формулы приведения.
12. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
13. Тригонометрические функции двойного аргумента.
14. Формула вероятности. Комбинаторные формулы.

Геометрия

1. Свойства равнобедренного треугольника.
2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.
3. Признаки параллельности прямых.
4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.
5. Признаки параллелограмма, его свойства.
6. Окружность, описанная около треугольника.
7. Окружность, вписанная в треугольник.
8. Касательная к окружности и ее свойство.
9. Величина угла, вписанного в окружность.
10. Признаки подобия треугольников.
11. Теорема Пифагора.
12. Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.
13. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.
14. Признак параллельности прямой и плоскости.
15. Признак параллельности плоскостей.
16. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.
17. Перпендикулярность двух плоскостей.
18. Теоремы о параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
19. Теорема о трех перпендикулярах.

III. Содержание разделов программы

1. Алгебра

Числа, корни и степени. Целые числа. Степень с натуральным показателем. Дроби, проценты, рациональные числа. Степень с целым показателем. Корень степени $n > 1$ и его свойства. Степень с рациональным показателем и её свойства. Свойства степени с действительным показателем.

Основы тригонометрии. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла. Радианная мера угла. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла.

Логарифмы. Логарифм числа. Логарифм произведения, частного, степени. Десятичный и натуральный логарифмы, число е.

Преобразования выражений. Преобразования выражений, включающих арифметические операции. Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень. Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени. Преобразования тригонометрических выражений. Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования. Модуль (абсолютная величина) числа.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма; вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования; проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

2. Уравнения и неравенства

Уравнения. Квадратные уравнения. Рациональные уравнения. Иррациональные уравнения. Тригонометрические уравнения. Показательные уравнения. Логарифмические уравнения. Равносильность уравнений, систем уравнений. Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными. Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.

Неравенства. Квадратные неравенства. Рациональные неравенства. Показательные неравенства. Логарифмические неравенства. Системы линейных неравенств. Системы неравенств с одной переменной. Равносильность неравенств, систем неравенств. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств. Метод интервалов. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы; решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод; решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы; моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

3. Функции

Определение и график функции. Функция, область определения функции. Множество значений функции. График функции. Обратная функция. График обратной функции. Преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат.

Элементарное исследование функций. Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания. Чётность и нечётность функции. Периодичность функции. Ограниченность функции. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Основные элементарные функции. Линейная функция, её график. Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график. Квадратичная функция, её график. Степенная функция с натуральным показателем, её график. Тригонометрические функции, их графики. Показательная функция, её график. Логарифмическая функция, её график.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции; описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках.

4. Начала математического анализа.

Производная. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частного. Производные основных элементарных функций. Вторая производная и её физический смысл.

Исследование функций. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах.

Первообразная и интеграл. Первообразные элементарных функций.

Требования к уровню освоения содержания раздела:

Абитуриент должен уметь: находить производную функции; решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения; вычислять производные и первообразные элементарных функций.

5. Геометрия

Планиметрия. Треугольник. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Трапеция. Окружность и круг. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника. Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника. Правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника.

Прямые и плоскости в пространстве. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; перпендикулярность прямых. Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства. Параллельность плоскостей, признаки и свойства. Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трёх перпендикулярах. Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства. Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур.

Многогранники. Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма. Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде. Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида. Сечения куба, призмы, пирамиды. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр). Тела и поверхности вращения. Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Шар и сфера, их сечения.

Измерение геометрических величин. Величина угла, градусная мера угла, соотношение между величиной угла и длиной дуги окружности. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы. Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара.

Координаты и векторы. Координаты на прямой, декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Вектор, модуль вектора, равенство векторов; сложение векторов и умножение вектора на число. Коллинеарные векторы. Компланарные векторы. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами.

Требования к уровню освоения содержания раздела:

Абитуриент должен уметь: решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей); решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы; определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами.

6. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

Элементы комбинаторики. Поочередный и одновременный выбор. Формулы числа сочетаний и перестановок.

Элементы статистики. Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных.

Элементы теории вероятностей. Вероятности событий.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий.

IV. Литература

Основная литература:

1. Школьные учебники по математике.
2. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень) // М.: Мнемозина.
3. Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачева М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень) // М.: Мнемозина.
4. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень) // М.: Мнемозина.
5. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни) // М.: Просвещение.
6. Погорелов А.В. Геометрия (базовый и профильный уровни) // М.: Просвещение.
7. Ким Н.А. ЕГЭ-2026. Математика. 50 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену. Профильный уровень // Москва: АСТ, 2025.
8. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2026. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2026 года: учебно-методическое пособие / под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова // Ростов н/Д: Легион, 2025.
9. Садовничий Ю.В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Задания с развернутым ответом // Москва: Экзамен, 2025.
10. ЕГЭ-2026. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты. 26 вариантов /под редакцией И.В. Ященко // Москва, Национальное образование, 2026.

Дополнительная литература:

1. Н.Д. Золотарёва, А.Б. Золотарёв. Математика. Готовимся к ЕГЭ. Профильный уровень. Сборник задач с примерами решений типовых заданий: учебно-методическое пособие // Москва: Лаборатория знаний, 2025.
2. Никольский С.М., Потапов М.К. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровень) // М.: Просвещение.
3. Балаян Э.Н. Математика. Пособие для подготовки к ЕГЭ и доп. экзамену. 10-11 классы. Профильный уровень // Москва: Феникс, 2024.
4. ЕГЭ-2026. Математика. Базовый уровень. Типовые экзаменационные варианты. 30 вариантов. ЕГЭ 2026. ФИПИ – школе/ под редакцией И.В. Ященко // Москва: Национальное образование, 2026.

Интернет-ресурсы:

1. Федеральный институт педагогических измерений https://fipi.ru/.
2. Официальный информационный портал единого государственного экзамена https://obrnadzor.gov.ru/gia/gia-11/.
3. https://ege.sdamgia.ru/. На данном сайте представлены все прототипы задач школьного курса математики, входящих в КИМ ЕГЭ.
4. https://alexlarin.net/. На данном сайте представлены тренировочные варианты Единого государственного экзамена текущего года и предыдущих лет.

V. Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

Экзаменационная работа проводится в письменной форме, на русском языке.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными или синими чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

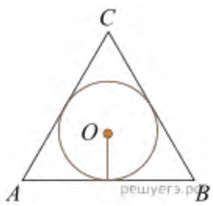
Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов был записан под правильным номером.

VI. Примерный вариант письменной работы по математике

Вариант сформирован на сайте Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru).

1. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Решение. Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AB^2\sin A}{\frac{3AB}{2}} = \frac{\sqrt{3}\sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}5.$$

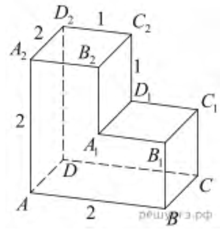
Ответ: 0,5.

2. Длина вектора $\vec{a}$ равна $2\sqrt{2}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°, а скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ равно 12. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

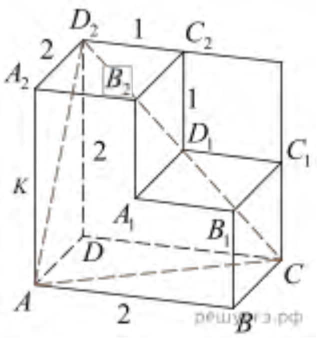
Решение. Длина вектора $\vec{b}$ равна

$$|\vec{b}| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\cos\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\cdot|\vec{a}|} = \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{2}} = 6.$$

Ответ: 6.



3. Найдите угол CAD_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.



Решение. Рассмотрим треугольник CAD_2, где $AC = CD_2 = AD_2$, так как являются диагоналями равных квадратов. Следовательно, треугольник CAD_2 — равносторонний, поэтому все его углы равны 60°.

Ответ: 60.

4. В праздничном наборе 100 шариков: 10 красных, 20 синих, остальные желтые и зеленые, их поровну. Какова вероятность того, что из набора достали один шарик синего или желтого цвета?

Решение. Найдем количество желтых шариков в наборе:

$$\frac{100-10-20}{2} = 35.$$

Вероятность того, что из набора достали один шарик синего или желтого цвета, равна

$$\frac{20+35}{100} = 0,55.$$

Ответ: 0,55.

5. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?

Решение. Вероятность попадания в мишень равна 0,2. Вероятность противоположного события — промаха — равна 1-0,2=0,8. Заметим, что вероятность поражения цели после *n* выстрелов равна $1-0,8^n$. Таким образом, задача сводится к решению неравенства

$1-0,8^n \geqslant 0,6 \Leftrightarrow 0,8^n \leqslant 0,4.$

При $n=2$ получаем $0,8^2=0,64.$ При $n=3$ получаем $0,8^3=0,512.$ При $n=4$ получаем $0,8^4=0,4096.$ При $n=5$ получаем $0,8^5=0,32768.$ Таким образом, ответ — 5.

Ответ: 5.

6. Найдите корень уравнения: $9^{-5+x}=729.$

Решение. Перейдем к одному основанию степени:

$$9^{-5+x}=729 \Leftrightarrow 9^{-5+x}=9^3 \Leftrightarrow -5+x=3 \Leftrightarrow x=8.$$

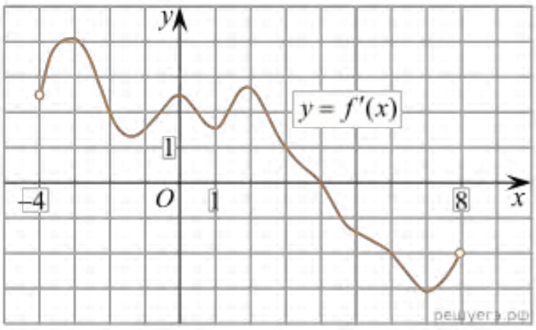
Ответ: 8.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}.$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}=\frac{7^{\frac{1}{9}+\frac{1}{18}}}{7^{\frac{1}{6}}}=7^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}}=1.$$

Ответ: 1.



8. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−4; 8). Найдите точку экстремума функции *f(x)* на отрезке [−2; 6].

Решение. Если производная в некоторой точке равна нулю и меняет знак, то это точка экстремума. На отрезке [−2; 6] график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, точка 4 является точкой экстремума.

Ответ: 4.

9. Катер должен пересечь реку шириной $L=100$ м и со скоростью течения $u=0,5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t=\dfrac{L}{u}\mathrm{ctg}\alpha,$ где α — острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 200 с?

Решение. Задача сводится к решению неравенства $\frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 200$ на интервале $(0^\circ;\ 90^\circ)$ при заданных значениях длины реки $L = 100$ м и скорости течения $u = 0,5$ м/с:

$$\frac{100}{0,5}\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 200 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha \leqslant 1 \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 45^\circ \leqslant \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 45.

10. На изготовление 475 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 550 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Решение. Обозначим n — число деталей, которые изготавливает за час первый рабочий, тогда второй рабочий за час изготавливает $n-3$ деталей, $n>3$. На изготовление 475 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 550 таких же деталей, отсюда имеем:

$$\frac{475}{n}+6=\frac{550}{n-3} \underset{n>3}{\Leftrightarrow} \frac{475+6n}{n}=\frac{550}{n-3} \underset{n>3}{\Leftrightarrow} \underset{n>3}{\Leftrightarrow} 475n-3\cdot 475+6n^2-18n=550n \underset{n>3}{\Leftrightarrow}$$

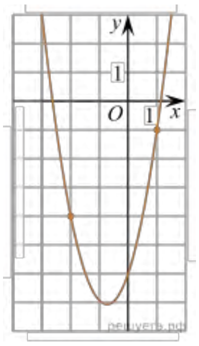
$$\underset{n>3}{\Leftrightarrow} 6n^2-93n-3\cdot 475=0 \underset{n>3}{\Leftrightarrow} 2n^2-31n-475=0 \underset{n>3}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{n>3}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} n=\dfrac{31+\sqrt{31^2+4\cdot 2\cdot 475}}{4}=25; \\ n=\dfrac{31-\sqrt{31^2+4\cdot 2\cdot 475}}{4}=-9.5 \end{array}\right. \underset{n>3}{\Leftrightarrow} n=25.$$

Таким образом, первый рабочий делает 25 деталей в час.

Ответ: 25.

11. На рисунке изображён график функции $f(x)=ax^2+bx-6.$ Найдите $f(-6)$.



Решение. Заметим, что $f(-2)=4a-2b-6=-4,$ $f(1)=a+b-6=-1.$ Решая эту систему, находим: $a = 2$, $b = 3$. Тогда

$$f(-6)=2\cdot 36-3\cdot 6-6=72-18-6=48.$$

Ответ: 48.

12. Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1.$

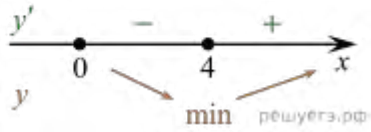
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

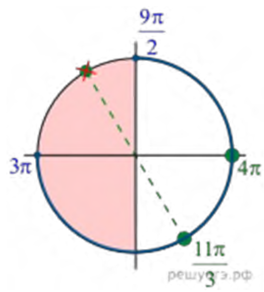
Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4.$

Ответ: 4.

13. а) Решите уравнение: $(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0.$



б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0.$ Поэтому множитель $\sqrt{\cos x}$ положителен. Тогда

$$(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x - 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, \end{array}\right. \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$$

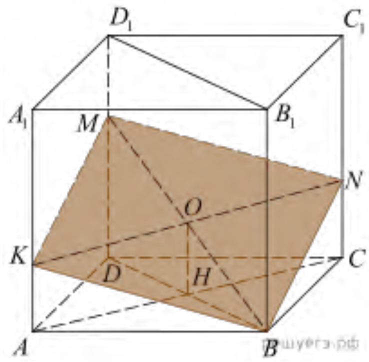
б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $\frac{11\pi}{3}$ и $4\pi.$

Ответ: а) $\left\{2\pi k,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k:\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{11\pi}{3},\ 4\pi.$

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

14. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки B и K проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.
а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM : MD_1 = 2 : 1$.
б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.



Решение. Пусть четырёхугольник $KBNM$ — сечение данной призмы плоскостью α (см. рис.). Прямая AC параллельна плоскости α, а плоскость ACK пересекает плоскость α по прямой KN, следовательно, $KN \parallel AC$ и, значит, $AKNC$ — прямоугольник. Прямые BD и AC являются соответственно проекциями прямых BM и KN на плоскость ABC, значит, точка пересечения прямых BD и AC (точка H) является проекцией точки пересечения прямых BM и KN (точки O) на эту плоскость. Таким образом, $OH = AK = \frac{1}{3}AA_1.$ С другой стороны, отрезок OH — средняя линия треугольника BDM и, следовательно, $DM = 2OH = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}DD_1,$ откуда и следует доказываемое утверждение.

б) Так как $AC \perp BD$ и $AC \perp BB_1$, то $AC \perp (BDD_1)$. Но $KN \parallel AC$, значит, и $KN \perp (BDD_1)$. Следовательно, $KN \perp BM$, поскольку $BM \subset (BDD_1)$ и площадь сечения S равна $S = \frac{BM \cdot KN}{2}.$ Имеем:

$$KN = AC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$

$$BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{32 + 16} = 4\sqrt{3},$$

$$S = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{6}.$$

Ответ: б) $8\sqrt{6}.$

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и	3

обоснованно получен верный ответ в пункте б)	
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15. Решите неравенство: $(x^2+1)^{\lg(7x^2-3x+1)}+(7x^2-3x+1)^{\lg(x^2+1)}\leqslant 2.$

Решение. Так как $x^2+1>0$ и $7x^2-3x+1>0$ для любого *x*, воспользовавшись тождеством $x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$, заключаем, что слагаемые в левой части неравенства равны. Тогда получаем:

$$(x^2+1)^{\lg(7x^2-3x+1)}\leqslant 1.$$

Заметим, что при $x=0$ неравенство верно. При $x\neq 0$ основание степени больше 1, поэтому показатель степени должен быть неположительным:

$$\begin{cases}\lg(7x^2-3x+1)\leqslant 0,\\ x\neq 0\end{cases}\underset{10>1}{\Leftrightarrow}\underset{10>1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}7x^2-3x+1\leqslant 1,\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\leqslant\frac{3}{7}.$$

Объединяя рассмотренные случаи, получаем: $0\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{7}.$

Ответ: $\left[0;\ \dfrac{3}{7}\right].$

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Максимальный балл	2

16. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 600 000 рублей на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа с 1 по 25 месяц долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму;

— 15-го числа 26 месяца долг должен быть погашен.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 25 месяца, если всего было выплачено 691 тысяч рублей?

Решение. Пусть 15-го числа 25-го месяца долг составит x тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$600;\quad \frac{24\cdot 600+x}{25};\quad \frac{23\cdot 600+2x}{25};\ \ldots\quad \frac{600+24x}{25};\quad x;\quad 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 1%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$606;\quad 1{,}01\cdot\frac{24\cdot 600+x}{25};\ \ldots\quad 1{,}01\cdot\frac{600+24x}{25};\quad 1{,}01x.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$6+\frac{600-x}{25};\quad 0{,}01\cdot\frac{24\cdot 600+x}{25}+$$
$$+\frac{600-x}{25};\ \ldots\quad 0{,}01\cdot\frac{600+24x}{25}+\frac{600-x}{25};\quad 1{,}01x.$$

Всего следует выплатить

$$0{,}01\cdot\frac{26\cdot 600+24x}{2}+600-x++1{,}01x=0{,}13x+678\ \text{(тыс.рублей)},$$

откуда $0{,}13x+678=691 \Leftrightarrow 0{,}13x=13 \Leftrightarrow x=100.$ Значит, 15-го числа 25-го месяца долг составит 100 тыс. рублей.

Ответ: 100.

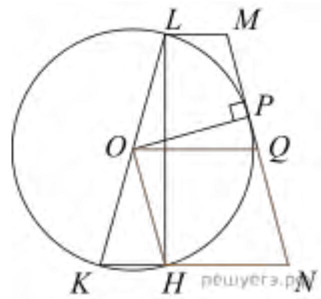
Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H, точка Q — середина MN.

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN, если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.



Решение. а) Треугольник KOH равнобедренный и трапеция $KLMN$ равнобедренная, поэтому $\angle KHO = \angle OKH = \angle MNK$. Значит, прямые OH и MN параллельны, а поскольку прямая OQ — средняя линия трапеции, то параллельны прямые OQ и KN. Противоположные стороны четырёхугольника $NQOH$ попарно параллельны, следовательно, четырехугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Пусть окружность с центром в точке O радиуса R касается стороны MN в точке P. В прямоугольных треугольниках OPQ и KHL имеем:

$$OQ = \frac{OP}{\sin\angle OQP} = \frac{R}{\sin 75^\circ},$$

$$KH = KL\cos\angle LKH = 2R\cos 75^\circ.$$

Поэтому

$$\frac{KH}{NH} = \frac{KH}{OQ} = \frac{2R\cos 75^\circ}{\frac{R}{\sin 75^\circ}} = 2\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}.$$

Пусть $KH = x$. Трапеция $KLMN$ — равнобедренная, поэтому

$$KN = 2KH + LM,$$

$$NH = KH + LM = x + 1,$$

$$\frac{KH}{NH} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $x = 1$. Значит, $KN = 2x + 1 = 3$.

Ответ: б) 3.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за	1

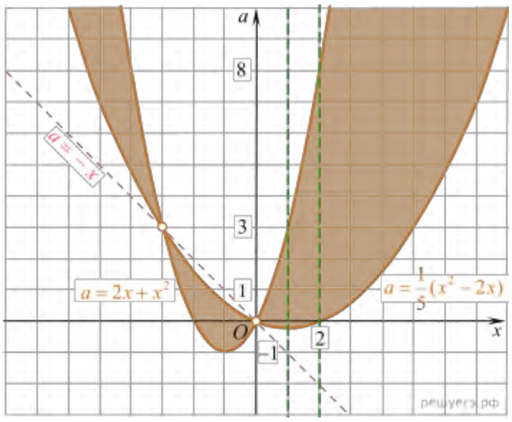
арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\left|\frac{x^2+x-2a}{x+a}-1\right| \leqslant 2$$

не имеет решений на интервале (1; 2).

Решение. Преобразуем исходное неравенство:



$$\left|\frac{x^2+x-2a}{x+a}-1\right| \leqslant 2 \Leftrightarrow \left|\frac{x^2-3a}{x+a}\right| \leqslant 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-3a| \leqslant 2|x+a|, \\ x \neq -a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-3a)^2-4(x+a)^2 \leqslant 0, \\ x \neq -a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-2x-5a)(x^2+2x-a) \leqslant 0, \\ x \neq -a. \end{cases}$$

В системе координат *xOa* решением системы являются координаты точек выделенных оранжевым цветом

С помощью графика найдём решения неравенства на интервале (1; 2):

1. При $a \leqslant -\frac{1}{5}$ **неравенство не имеет решений**.

2. При $-\frac{1}{5} < a < 0$ решением являются все точки, лежащие правее прямой $x = 1$, но левее правой ветви параболы $a = \frac{1}{5}(x^2-2x)$, то есть $1 < x \leqslant 1+\sqrt{1+5a}$.

3. При $0 \leqslant a \leqslant 3$ решением являются все точки между прямыми $x = 1$ и $x = 2$, то есть $1 < x < 2$.

4. При $3 < a < 8$ решением являются все точки, лежащие правее правой ветви параболы $a = x^2+2x$, и левее прямой $x = 2$, то есть $-1+\sqrt{1+a} \leqslant x < 2$.

5. При $a \geqslant 8$ **неравенство не имеет решений**.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right]$; $[8; +\infty)$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *a*.	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *a*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

19. Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{13}{7}$?

б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{8}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25?

Решение. Заметим, что треугольник тупоугольный тогда и только тогда, когда сумма квадратов длин его меньших сторон меньше квадрата большей стороны.

а) Да, например в треугольнике со сторонами 13, 7, 8 выполнено $13 < 7 + 8$ и $13^2 > 7^2 + 8^2$.

б) Нет. Пусть большая сторона равна 8*x*, а меньшая — 7*x*. Тогда средняя не меньше 7*x*, но $(7x)^2 + (7x)^2 > (8x)^2$.

в) Пусть меньшая сторона равна *a*, а большая равна *c*. Тогда $c^2 > 625 + a^2$, $c < 25 + a$ и нужно минимизировать $\frac{c}{a}$. Рассмотрим любую подходящую пару чисел (a, c) и увеличим оба числа на единицу. Тогда по-прежнему $(c+1)^2 > 625 + (a+1)^2$ (к правой части прибавили $2c+1$, а к левой — $2a+1$), $c + 1 < 25 + (a+1)$ (к обеим частям прибавили поровну), а отношение уменьшилось (было $1 + \frac{c-a}{a}$, стало $1 + \frac{c-a}{a+1}$). Поэтому можно увеличивать *a*, пока оно не станет равно 24.

Теперь будем просто уменьшать c, пока это возможно, $\frac{35}{24}$. то есть пока $c^2 > 625 + 576 = 1201$.

Наименьшее такое c — это 35. Поэтому ответ

Ответ: а) да; б) нет; в) $\frac{35}{24}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

VII. Система оценивания письменной экзаменационной работы по математике

Оценивание правильности выполнения заданий, предусматривающих краткий ответ, осуществляется сравнением ответа, приведенного в работе, с эталонным. Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Проверка выполнения заданий 13–19 проводится экспертами на основе разработанной системы критериев оценивания. Полное правильное решение каждого из заданий 13, 15 и 16 оценивается 2 баллами; каждого из заданий 14 и 17 – 3 баллами; каждого из заданий 18 и 19 – 4 баллами.

Система оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом основывается на следующих принципах:

1. Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование – решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не недочёты по сравнению с «эталонным» решением. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

2. При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования. Тексты заданий экзаменационной работы в целом соответствуют формулировкам, принятым в учебниках, включённых в федеральный перечень учебников, допущенных Минпросвещения России к использованию при

реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ основного общего и среднего общего образования.

Максимальный первичный балл за выполнение экзаменационной работы – 32

На основе результатов выполнения всех заданий работы определяются первичные баллы, которые затем переводятся в тестовые по 100-балльной шкале.