

**МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ П.П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО»
(ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)**

УТВЕРЖДАЮ
Ректор ЛГПУ
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

Н.В. Федина
«29» октября 2020 г.



**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

Липецк – 2020

Пояснительная записка

Цель вступительного испытания: определить уровень математической подготовки поступающего.

Задачи вступительного испытания: проверить уровень математических знаний поступающего и умение применять их при решении математических задач.

Поступающий в должен:

знать: основные математические понятия, факты и методы, в соответствии с программой средней школы;

уметь: самостоятельно решать математические задачи, проводя необходимые вычисления и рассуждения; грамотно излагать полученные результаты;

владеть: навыками практического использования основных математических понятий, фактов и методов при решении различных задач.

Максимальный балл – 100 баллов.

Минимальный положительный балл – 39 баллов.

Содержание программы

Программа по математике для поступающих в ЛГПУ состоит из разделов:

- 1) Основные математические понятия и факты – представляет собой полный перечень математических понятий и фактов, которыми должен владеть поступающий.
- 2) Основные формулы и теоремы – содержит основные утверждения и теоремы, используемые при решении задач вступительного экзамена по математике.
- 3) Содержание разделов – описывает наполняемость каждого из разделов.
- 4) Литература – приведены наименования пособий, которые могут быть использованы при подготовке к вступительному испытанию.
- 5) Инструкция по выполнению работы.
- 6) Примерный вариант письменной работы по математике
- 7) Система оценивания письменной экзаменационной работы по математике

I. Основные математические понятия и факты

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа (N). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное.

2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.

3. Целые числа (Z). Рациональные числа (Q), их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.
4. Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей.
5. Изображение чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.
6. Числовые выражения, выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.
7. Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.
8. Логарифмы и их свойства.
9. Одночлен и многочлен.
10. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена на примере квадратного трехчлена.
11. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции.
12. График функции. Возрастание и убывание функции, периодичность, четность, нечетность.
13. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.
14. Определения и основные свойства функций:
 - а) линейной $y = ax + b$,
 - б) квадратичной $y = ax^2 + bx + c$,
 - в) степенной $y = ax^n$ ($n \in N$), $y = \frac{k}{x}$,
 - г) показательной $y = a^x$ ($a > 0$),
 - д) логарифмической $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$),
 - е) тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$,
 - ж) арифметического корня $y = \sqrt{x}$.
15. Уравнение. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях.
16. Неравенства. Решения неравенства. Понятие о равносильных неравенствах.
17. Система уравнений и неравенств. Решения системы.
18. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n -го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формулы n -го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.
19. Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).

20. Преобразование в произведение выражений $\sin \alpha \pm \sin \beta$, $\cos \alpha \pm \cos \beta$.
21. Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.
22. Производные функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = \log_a x$.
23. Производная суммы, произведения, частного двух функций, производная сложной функции.
24. Статистические характеристики.
25. Понятие вероятности. Простейшие комбинаторные комбинации.

Геометрия

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная. Длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.
2. Примеры преобразования фигур, виды симметрий. Преобразование подобия и его свойства.
3. Векторы. Операции над векторами.
4. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.
5. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника.
6. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.
7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.
8. Центральные и вписанные углы.
9. Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.
10. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.
11. Подобие. Подобные фигуры, отношение площадей подобных фигур.
12. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.
13. Параллельность прямой и плоскости.
14. Угол между прямой и плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.
15. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.
16. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы, пирамиды. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды, их виды.

17. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.
18. Формула объема параллелепипеда.
19. Формулы площади поверхности и объема призмы.
20. Формулы площади поверхности и объема пирамиды.
21. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.
22. Формулы площади поверхности и объема конуса.
23. Формула объема шара.
24. Формула площади сферы.

II Основные формулы и теоремы

Алгебра и начала анализа

1. Свойства функции $y = ax + b$ и ее график.
2. Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ и ее график.
3. Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее график.
4. Формула корней квадратного уравнения.
5. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.
6. Свойства числовых неравенств.
7. Логарифм произведения, степени, частного.
8. Определение и свойства функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и их графики.
9. Определение и свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график.
10. Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.
11. Формулы приведения.
12. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
13. Тригонометрические функции двойного аргумента.
14. Формула вероятности. Комбинаторные формулы.

Геометрия

1. Свойства равнобедренного треугольника.
2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.
3. Признаки параллельности прямых.
4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.
5. Признаки параллелограмма, его свойства.
6. Окружность, описанная около треугольника.

7. Окружность, вписанная в треугольник.
8. Касательная к окружности и ее свойство.
9. Величина угла, вписанного в окружность.
10. Признаки подобия треугольников.
11. Теорема Пифагора.
12. Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.
13. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.
14. Признак параллельности прямой и плоскости.
15. Признак параллельности плоскостей.
16. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.
17. Перпендикулярность двух плоскостей.
18. Теоремы о параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
19. Теорема о трех перпендикулярах.

Содержание разделов программы

1. Алгебра

Числа, корни и степени. Целые числа. Степень с натуральным показателем. Дроби, проценты, рациональные числа. Степень с целым показателем. Корень степени $n > 1$ и его свойства. Степень с рациональным показателем и её свойства. Свойства степени с действительным показателем.

Основы тригонометрии. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла. Радианная мера угла. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла.

Логарифмы. Логарифм числа. Логарифм произведения, частного, степени. Десятичный и натуральный логарифмы, число e .

Преобразования выражений. Преобразования выражений, включающих арифметические операции. Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень. Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени. Преобразования тригонометрических выражений. Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования. Модуль (абсолютная величина) числа.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма; вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования; проводить по известным формулам и правилам

преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

2. Уравнения и неравенства

Уравнения. Квадратные уравнения. Рациональные уравнения. Иррациональные уравнения. Тригонометрические уравнения. Показательные уравнения. Логарифмические уравнения. Равносильность уравнений, систем уравнений. Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными. Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.

Неравенства. Квадратные неравенства. Рациональные неравенства. Показательные неравенства. Логарифмические неравенства. Системы линейных неравенств. Системы неравенств с одной переменной. Равносильность неравенств, систем неравенств. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств. Метод интервалов. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы; решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод; решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы; моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

3. Функции

Определение и график функции. Функция, область определения функции. Множество значений функции. График функции. Обратная функция. График обратной функции. Преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат.

Элементарное исследование функций. Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания. Чётность и нечётность функции. Периодичность функции.

Ограниченность функции. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Основные элементарные функции. Линейная функция, её график. Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график. Квадратичная функция, её график. Степенная функция с натуральным показателем, её график. Тригонометрические функции, их графики. Показательная функция, её график. Логарифмическая функция, её график.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции; описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках.

4. Начала математического анализа

Производная. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частного. Производные основных элементарных функций. Вторая производная и её физический смысл.

Исследование функций. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах.

Первообразная и интеграл. Первообразные элементарных функций.

Требования к уровню освоения содержания раздела:

Абитуриент должен уметь: находить производную функции; решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения; вычислять производные и первообразные элементарных функций.

5. Геометрия

Планиметрия. Треугольник. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Трапеция. Окружность и круг. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника. Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника.

Правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника.

Прямые и плоскости в пространстве. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; перпендикулярность прямых. Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства. Параллельность плоскостей, признаки и свойства. Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трёх перпендикулярах. Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства. Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур.

Многогранники. Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма. Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде. Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида. Сечения куба, призмы, пирамиды. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр). Тела и поверхности вращения. Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Шар и сфера, их сечения.

Измерение геометрических величин. Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы. Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара.

Координаты и векторы. Координаты на прямой, декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Вектор, модуль вектора, равенство векторов; сложение векторов и умножение вектора на число. Коллинеарные векторы. Компланарные векторы. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами.

Требования к уровню освоения содержания раздела:

Абитуриент должен уметь: решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей); решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы; определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами.

6. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Элементы комбинаторики. Поочередный и одновременный выбор. Формулы числа сочетаний и перестановок.

Элементы статистики. Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных.

Элементы теории вероятностей. Вероятности событий.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий.

Литература

Основная литература:

1. Школьные учебники по математике.
2. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень) // М.: Мнемозина.
3. Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачева М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень) // М.: Мнемозина.
4. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень) // М.: Мнемозина.
5. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни) // М.: Просвещение.
6. Погорелов А.В. Геометрия (базовый и профильный уровни) // М.: Просвещение.
7. ЕГЭ-20 Математика. Базовый уровень. Типовые экзаменационные варианты. 30 вариантов / под ред. И. В. Ященко.– М.: Национальное образование, 2019.
8. ЕГЭ-20 Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты. 30 вариантов / под ред. И. В. Ященко.– М.: Национальное образование, 2019.

Дополнительная литература:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник // М.: Академия, 2002.
2. Крамор В.С. Математика. Учебное пособие. Готовимся к экзамену по математике // М.: Оникс, 2008.
3. Никольский С.М., Потапов М.К. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровень) // М.: Просвещение.
4. ЕГЭ 2020. Математика. Базовый уровень. Практикум. Экзаменационные тесты. Лаппо Л.Д., Попов М.А.
5. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. Практикум. Экзаменационные тесты. Лаппо Л.Д., Попов М.А.

6. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. Тематические тренировочные задания. Супертренинг. Лаппо Л.Д., Попов М.А.

Интернет-ресурсы:

1. Федеральный институт педагогических измерений <http://fipi.ru/>.
2. Официальный информационный портал единого государственного экзамена <http://ege.edu.ru>
3. <http://решуегэ.рф/>. На данном сайте представлены все прототипы задач школьного курса математики. Здесь можно потренироваться в решении задач при подготовке к сдаче теста по остаточным знаниям школьного курса математики.
4. <http://alexlarin.net>. На данном сайте представлены примерные варианты Единого государственного экзамена текущего года и предыдущих лет.

Инструкция по выполнению работы

Вступительное испытание по математике проводится в письменной форме, на русском языке.

Согласно Положению о приемной комиссии, время проведения вступительного испытания – не более 4 часов для письменных испытаний; для лиц с ОВЗ – увеличение до 1,5 часа.

Испытание проводится в виде письменного экзамена, результаты выполнения которого оцениваются по 100-балльной шкале в соответствии с прилагаемыми критериями оценок, минимальный положительный балл – 39.

Экзаменационная работа состоит из двух частей:

- 1) состоит из тестовых заданий с кратким ответом.
- 2) состоит из заданий повышенного уровня сложности, предполагающих письменное развернутое решение.

Ответы к заданиям первой части выбираются из предложенных. При выполнении заданий второй части абитуриент должен записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Количество заданий каждой части определяется членами комиссии.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Примерный вариант письменной работы по математике

Часть 1

1. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 21 дня. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

- 1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC=4,8$ см, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AB.

- 1) 5 2) 1 3) 3 4) 4,5

3. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

- 1) 0,6 2) 0,3 3) 0,5 4) 0,55

4. Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

- 1) -9 2) -8 3) 9 4) 8

5. Найдите значение выражения $\frac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}} \cdot \frac{16}{a^{-1} \cdot b^{-4}}$.

- 1) 4 2) -25 3) 16 4) 0,25

6. Решите неравенство $3^{7-x} \geq 9$.

- 1) $(-\infty; 5]$ 2) $(5; +\infty)$ 3) $[3; 9]$ 4) $[0; 5]$

7. Найдите $\frac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

- 1) -9 2) -3 3) 9 4) 3

8. Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{7}$.

- 1) 8 2) 7 3) 22 4) 21

9. Найдите корни уравнения: $\cos \frac{\pi(x+1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

- 1) -2 2) -4 3) -1 4) -3

10. Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 20x^2 + 100x + 23$.

- 1) $-\frac{10}{3}$ 2) -10 3) 10 4) -3

Часть 2

11. а) Решите уравнение $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 2]$.

12. Один мастер может выполнить заказ за 12 часов, а другой – за 6 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

13. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

14. Решите неравенство: $(x^2 - x - 6)\sqrt{8-x} \leq 0$.

15. а) Решите уравнение $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

Система оценивания письменной экзаменационной работы по математике

За решение всех заданий первой части абитуриент получает 50 баллов.

За решение всех заданий второй части абитуриент получает 50 баллов.

Итого 100 баллов.

Критерии оценивания заданий Части 2.

Количество баллов, выставленных за выполнение Части 2, зависит от полноты решения и правильности ответа. Содержание критериев выставления баллов зависит от предлагаемого способа решения задачи.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов. При проверке учитывается только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитываются. При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.