МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО»

(ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)

УТВЕРЖДАЮ
и.о. ректора ЛГПУ
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

_____ Н.В. Федина
«29» сентября 2017 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ ПРИ ПРИЕМЕ НА ОБУЧЕНИЕ ПО ПРОГРАММАМ ПОДГОТОВКИ НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ В АСПИРАНТУРЕ

Направление подготовки
01.06.01 – МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Направленность подготовки
ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Липецк – 2017

Пояснительная записка

Вступительные испытания в аспирантуру ФГБОУ ВО «Липецкий государственный педагогический университете имени П.П. Семенова-Тян-Шанского» (ЛГПУ) по специальной дисциплине направления подготовки 01.06.01-математика и механика с профилем подготовки 01.01.01-вещественный, комплексный и функциональный анализ проводятся в устной форме.

Вступительные испытания проводятся на русском языке.

Результаты испытаний оцениваются по 5-балльной шкале. Минимальный положительный балл – 3. Критерии оценивания устного испытания приведены в примерной программе.

Программа вступительного испытания по специальной дисциплине по профилю «01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ» направления «01.06.01 – математика и механика» составлена в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего образования.

Примерная программа вступительного испытания по специальной дисциплине

I. Теория функций вещественных переменных

1. МЕРА, ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ, ИНТЕГРАЛ.

   Аддитивность и счетная аддитивность меры. Лебегово продолжение меры. Измеримые функции. Сходимость по мере. Сходимость почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение с интегралом Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

   [2],гл.5, [5],гл.3-6, [8],гл.10.

2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА. ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.

   Дифференцирование монотонной функции. Функции с ограниченным изменением. Производная неопределенного интеграла Лебега. Восстановление функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона-Никодима. Интеграл Стильтьеса.

   [2],гл.6, [5],гл.8-9,13,17.

3. ПРОСТРАНСТВА СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ.

   Пространства L^2 , ортогональные системы функций в L^2. Ряды по ортогональным системам.

   [2],гл.7, [5],гл.7.

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.

   Условия сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье в L^1 и L^2. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье-Стильтьеса.

   [2],гл.8, [5],гл.10, [6],гл.15-16.

II. Теория функций комплексной переменной

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

   Интегральная теорема Коши и формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого.

   [7],гл.4, [4],гл.3, [3],гл.1,3.

2. РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОСОБЫЕ ТОЧКИ, ВЫЧЕТЫ.

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса, разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированые особые точки (однозначного характера). Вычеты, теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Теорема Рунге о приближении аналитических функций многочленами. Полиномы Фабера. Разложение аналитических функций в ряды полиномов Фабера. Скорость сходимости.

[7],гл.5-7, [4],гл.3,4,5, [3],гл.1,5.

3. ЦЕЛЫЕ И МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ.

Рост целой функции. Порядок и тип. Терема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями. Разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка. Теорема Адамара. Теорема Миттаг-Лефлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

[7],гл.9, [4],гл.7, [3],гл.5.

4. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ.

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерий однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

[7],гл.3,12, [4],гл.5, [3],гл.2.

5. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ.

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие о римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитической функции. Точки ветвления конечного и бесконечного порядка. Принцип симметрии. Отображение многоугольников, формула Кристоффеля-Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства. Критерий нормальности. Теорема Пикара.

[7],гл.10,12, [4],гл.8, [3],гл.2.

III. Функциональный анализ

1. МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.

Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических и топологических пространствах.

[2],гл.2, [9],гл.4.

2. НОРМИРОВАННЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана-Банаха. Нормированные пространства. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

[2],гл.3, [9],гл.9.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ.

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов. Компактные (вполне непрерывные) операторы.

[2],гл.4, [9],гл.4.

4. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ.

Теория ограниченных операторов. Пространства l^2 и L^2. Неограниченные операторы.
[9],гл.5.

5. ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцирования функционалов. Метод Ньютона.
[2],гл.10.

II часть. Линейная алгебра

N-мерное пространство. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Ортогонализация. Линейная функция. Билинейные формы и их метрики. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду. Закон инерции и ранг. Комплексные векторные пространства и эрмитовы формы. Инвариантные пространства. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен. Сопряженные преобразования. Самосопряженные преобразования. Нормальные и линейные преобразования в вещественном евклидовом пространстве. Экстремальные свойства собственных значений. Приведение линейных преобразований к жордановой нормальной форме. Инвариантные множители. Сопряженное пространство, биортогональные базисы.

Основная литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1976.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексной переменной. - М.: Наука, 1973.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 1,2. - М.: Наука, 1967-1968.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974.
6. Никольский С.М. Курс математического анализа. Том 2. - М.: Наука, 1975.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексной переменной. - М.: Наука, 1977.
8. Рудин У. Основы математического анализа.- М.: Мир, 1976.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 5. - М.: Физматиз, 1959.
10. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. - М.: Наука,1973.
11. Сидоров Ю.В. и др. Лекции по теории функций комплексной переменной.
12. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. - М.: Наука, 1966.
13. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры.
14. Шилов Г.А. Математический анализ.

Электронно-библиотечные системы:

1. «Лань» - договор № 3ЕД-0515 от 25.05.2015г. (25.05.2015-25.05.2016).
2. «ИЦ Академия» - договор № 5ЕД-0515 от 2.06.2015г. (02.06.2015-02.06.2018).
3. «Юрайт» - договор № 4ЕД-0515 от 26.05.2015г. (26.05.2015-26.05.2016).

Интернет – ресурсы:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа (учебник).- 7-е изд. - М.: Физматлит, 2009. (www.e.lanbook.com)
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа (учебное пособие). – 2-е изд. – М.: «Лань», 2009. (www.e.lanbook.com)

Вопросы
вступительного испытания в аспирантуру по специальной дисциплине направления подготовки 01.06.01-Математика и механика с профилем подготовки 01.01.01-Вещественный, комплексный и функциональный анализ

I. Теория функций вещественных переменных

1. Аддитивность и счетная аддитивность меры. Лебегово продолжение меры.
2. Измеримые функции.
3. Сходимость по мере. Сходимость почти всюду.
4. Теоремы Егорова и Лузина.
5. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение с интегралом Римана.
6. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.
7. Дифференцирование монотонной функции. Функции с ограниченным изменением.
8. Производная неопределенного интеграла Лебега. Восстановление функции по ее производной.
   Абсолютно непрерывные функции.
9. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона-Никодима.
10. Интеграл Стильтьеса.
11. Пространства L , ортогональные системы функций в L . Ряды по ортогональным системам.
12. Условия сходимости ряда Фурье.
13. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в
    тригонометрический ряд.
14. Преобразование Фурье в L^1 и L^2. Теорема Планшереля.
15. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье-Стильтьеса.

II. Теория функций комплексной переменной

1. Интегральная теорема Коши и формула Коши.
2. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля.
3. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого.
4. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций, теорема Вейерштрасса.
5. Разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, неравенства Коши.
6. Нули аналитических функций. Теорема единственности.
7. Изолированые особые точки (однозначного характера).
8. Вычеты, теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов.
9. Рост целой функции. Порядок и тип.

10. Терема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями. Разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка.
11. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями.
12. Принцип сохранения области. Критерий однолистности. Теорема Римана.
13. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.
14. Аналитическое продолжение. Продолжение вдоль кривой.
15. Понятие о римановой поверхности. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитической функции. Точки ветвления конечного и бесконечного порядка.

III. Функциональный анализ

1. Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Сепарабельность.
2. Принцип сжимающих отображений.
3. Компактность в метрических и топологических пространствах.
4. Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана-Банаха.
5. Нормированные пространства. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.
6. Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах.
7. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость.
8. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов.
9. Компактные (вполне непрерывные) операторы.
10. Теория ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.
11. Пространства l^2 и L^2. Неограниченные операторы.
12. Дифференцирование в линейных пространствах.
13. Сильный и слабый дифференциалы.
14. Производные и дифференциалы высших порядков.
15. Метод Ньютона.

II часть. Линейная алгебра

1. N-мерное пространство. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Ортогонализация.
2. Линейная функция. Билинейные формы и их метрики.
3. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду. Закон инерции и ранг.
4. Комплексные векторные пространства и эрмитовы формы.
5. Инвариантные пространства. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен.
6. Сопряженные, самосопряженные, нормальные и линейные преобразования в вещественном евклидовом пространстве.
7. Экстремальные свойства собственных значений.
8. Приведение линейных преобразований к жордановой нормальной форме.
9. Сопряженное пространство, биортогональные базисы.

Образец экзаменационного билета и рекомендации по ответу

Экзаменационный билет № 1

1. Аддитивность и счетная аддитивность меры. Лебегово продолжение меры.

2. Интегральная теорема Коши и формула Коши.

3. Принцип сжимающих отображений.

Рекомендации по ответу на вопросы билета

Первый вопрос билета относится к разделу: теория функций вещественных переменных.

По этому вопросу абитуриент устанавливает аддитивность и счетную аддитивность меры, материал иллюстрируется мерой на плоскости. Рассматривается лебегово продолжение меры.

При ответе приводятся необходимые понятия, определения и делаются ссылки на используемые утверждения.

Второй вопрос относится к разделу: теория функций комплексной переменной

По этому вопросу доказывается теорема Коши и устанавливается формула Коши. Приводятся иллюстративные примеры.

Третий вопрос относится к разделу: функциональный анализ.

При изложении этого вопроса приводятся необходимые определения полного метрического пространства, сжимающего отображения, неподвижной точки отображения и доказывается теорема Банаха о сжимающих отображениях.

Критерии оценок на вступительном испытании

Ответ абитуриента оценивает экзаменационная комиссия в составе не менее 3-х человек.

1. Оценка «неудовлетворительно» выставляется при отсутствии правильных ответов на все вопросы билета или при наличии не менее трех грубых ошибок, которые свидетельствуют о недостаточ
ной подготовленности абитуриента к обучению в аспирантуре по данному профилю подготовки.
2. Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные ответы (возможно неполные) на два из трех вопросов билета.

3. Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные ответы на все три вопроса билета, причем среди ответов на вопросы билета имеются неполные ответы.

4. Оценка «отлично» выставляется за правильные и полные ответы на все вопросы билета.